$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\alpha\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

令 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.（辅助角）

$\varphi\in[0,2\pi)$

φ 可在任意一宽度为 2π 的连续区间上

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

从 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 到

2. 使 $a>0$，若 $a<0$，比如 $-3\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=-(3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)$

$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\tan\varphi$

2. $a>0$. $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$. $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$

$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad$ $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

$\sqrt{1+3}$ $\quad$ $\tan\varphi=\sqrt{3}$

$$-\sin\alpha+\cos\alpha=-(\sin\alpha-\cos\alpha)=-\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$$

（1） $\sqrt{3}\sin x+\cos x$；（2） $\sin x-\cos x$；（3） $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{6}\sin 2x$.

(1) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$\tan\varphi=-1=-\frac{\pi}{4}$

(3) $\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{6}\sin 2x=-(\sqrt{6}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x)$

$=-2\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

$\tan\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

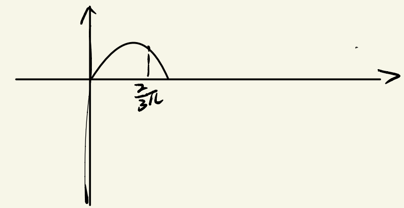
【例 2】（2015 • 四川） $\sin 15^{\circ}+\sin 75^{\circ}=$______.

$$\sin 15^{\circ}+\sin 75^{\circ}=\sin 15^{\circ}+\cos 15^{\circ}=\sqrt{2}\sin(15^{\circ}+45^{\circ})=\sqrt{2}\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

【例 3】已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{3})-\cos(x+\frac{\pi}{3})$，则 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $\underline{[0,1]}$.

$f(x)=2\sin[(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{6}]=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$x+\frac{\pi}{6}\in[0,\frac{2}{3}\pi]$ 时，$f(x)\in[0,1]$



【例 4】已知函数 $f(x)=\sin x-3\cos x(0\le x\le 2\pi)$，则 $f(x)$ 的最大值为 $\underline{\sqrt{10}}$.

$f(x)=\sqrt{10}\sin(x+\varphi)$ $\quad\tan\varphi=-3.$ $\quad\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$T=2\pi$ $\quad f(x)\in[-\sqrt{10},\sqrt{10}].$

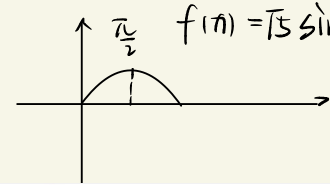
一个完整周期为 2π，才能定义域覆盖全部

【例 5】已知函数 $f(x)=\sin x+2\cos x(0\le x\le \frac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 的值域为______.

$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$ ， $\tan\varphi=2$ ， $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

令 $t=x+\varphi$ ， $t\in[\underset{0\sim\frac{\pi}{2}}{\varphi},\ \underset{>\frac{\pi}{2}}{\varphi+\frac{\pi}{2}}]$



$f(x)=\sqrt{5}\sin t$

$f(x)_{max}=\sqrt{5}$

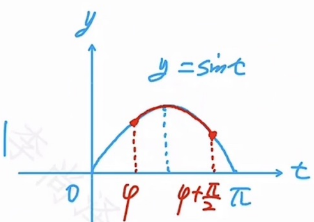
$f(x)_{min}$ 未知

【例 5】已知函数 $f(x)=\sin x+2\cos x(0\le x\le \frac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 的值域为______.

$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$. $\tan\varphi=2$ $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

令 $t=x+\varphi$. 则 $t\in[\varphi,\varphi+\frac{\pi}{2}]$ $f(x)=\sqrt{5}\sin t$

$f(x)_{max}=\sqrt{5}$ $\sqrt{5}\sin\varphi=\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=2$ $\sqrt{5}\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})=\sqrt{5}\cos\varphi=1$



$\therefore f(x)\in[1,\sqrt{5}]$.

【例 6】已知函数 $f(x)=\sin x+3\cos x(x\in\mathbf{R})$，若 $f(x)\le f(\theta)$ 恒成立，则 $\cos\theta=$______.

$f(x)_{max}=f(\theta)$

$f(x)=\sqrt{10}\sin(x+\varphi)$ $\tan\varphi=3$, $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

$f(\theta)=\sqrt{10}$

$\sin(\theta+\varphi)=1$

$\theta+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$

$\cos\theta=\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi)=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{3}{10}\sqrt{10}$