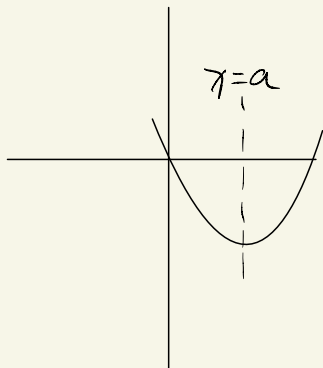




二次函数最大最小值

题组二：动轴定区间

【例 2】函数 $f(x) = x^2 - 2ax$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值为____，最大值为____.



① $a \geq 2$
则 $x=2$ 时为最小值

$$f(x)_{\max} = 1 - 2a$$

$$f(x)_{\min} = 4 - 4a$$

② $a \leq 1$

$$f(x)_{\max} = 4 - 4a$$

$$f(x)_{\min} = 1 - 2a$$

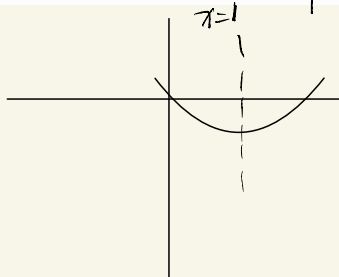
③ $1 < a < 2$ 时, $f(x)_{\min} = -a^2$

$$1 < a \leq \frac{3}{2} \text{ 时, } f(x)_{\max} = 4 - 4a$$

$$\frac{3}{2} \leq a < 2 \text{ 时, } f(x)_{\max} = 1 - 2a$$

题组三：定轴动区间

【例 3】函数 $f(x) = x^2 - 2x$ 在 $[a, a+2]$ 上的最小值为 $\begin{cases} a^2+2a & (a \leq -1) \\ a^2-2a & (a > -1) \end{cases}$ 最大值为 $\begin{cases} a^2+2a & (a \leq -1) \\ a^2-2a & (a > -1) \end{cases}$



① $a+2 \leq 1$ 时
 $a \leq -1$

$f(x)_{\max} = a^2 + 2a$

$f(x)_{\min} = a^2 + 2a$

② $a \geq 1$ 时

$f(x)_{\max} = a^2 + 2a$

$f(x)_{\min} = a^2 - 2a$

③ $-1 < a < 1$ 时, $f(x)_{\min} = -1$

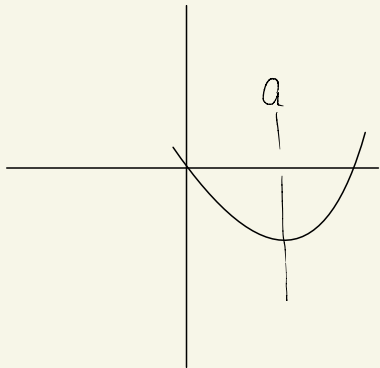
(i) $a \geq 0$ 时, $f(x)_{\max} = a^2 + 2a$

(ii) $-1 < a < 0$ 时, $f(x)_{\max} = a^2 - 2a$

题组四：动轴动区间

【例 4】函数 $f(x) = x^2 - 2ax$ 在 $[2-a, 4]$ 上的最小值为 $\begin{cases} 3a^2 - 8a + 4 & (a \leq -2 \text{ 或 } a \geq 4) \\ -a^2 & (-2 < a < 4) \end{cases}$

区间内两数不同,且小的在前



$2-a < 4$

$a > -2$

① $a \leq -2$ 时, $f(x)_{\min} = 3a^2 - 8a + 4$

② $a \geq 4$ 时, $f(x)_{\min} = 3a^2 - 8a + 4$

③ $-2 < a < 4$ 时, $f(x)_{\min} = -a^2$

题组一：一元二次不等式在 $\mathbb{R}$ 上恒成立

【例 1】不等式 $ax^2 + ax - 1 \leq 0$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都成立，则实数 a 的取值范围是 $[-4, 0]$

① 当 $a=0$ 时, $-1 \leq 0$, 成立

② 当 $a \neq 0$ 时, $a < 0$ 且 $\Delta \leq 0$

$$a^2 - 4 \times (-1) a \leq 0$$

$$a^2 + 4a \leq 0$$

$$a(a+4) \leq 0$$

$$-4 \leq a \leq 0$$

题组二：开口向上小于 0，或开口向下大于 0

【例 3】不等式 $x^2 + mx + 4 < 0$ 在 $x \in (1, 2)$ 时恒成立，则实数 m 的取值范围是 $[-5, -4)$

思路：只用考虑端点的正负。(将端点代入)

$$m^2 - 16 > 0$$

$$m > 4 \text{ 或 } m < -4$$

$$\begin{cases} 1+m+4 < 0 \\ 4+2m+4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m < -4 \end{cases}$$

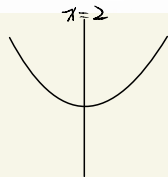
可以取等号

题组三：开口向上大于 0，或开口向下小于 0

【例 5】若关于 x 的不等式 $x^2 - 4x - 2 - a > 0$ 在区间 $(1, 4)$ 内恒成立，则 a 的取值范围是 $(-\infty, -6)$

题目可转化为 $\forall x \in D, x^2 - 4x - 2 - a > 0 \rightarrow \pi_{\min} > 0$

$\rightarrow x^2 - 4x - 2 - a < 0 \rightarrow \pi_{\max} < 0$



整个函数最低点为 $x=2$

$$\therefore \Delta < 0$$

$$16 - 4(-2-a) < 0$$

$$24 + 4a < 0$$

$$a < -6$$

知道对称轴，然后代入最大及最小的 x 。

不知道则参变分离，把要求的参数放一边

【例 7】不等式 $-x^2 + mx + 1 < 0$ 在 $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ 上恒成立，则实数 m 的取值范围是 $[-10, -\frac{5}{2}]$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{m}{2} + 1 < 0 \\ -4 + 2m + 1 < 0 \end{cases} \begin{cases} -1 + m + 1 \leq 0 \\ -4 + 2m + 1 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} m \leq -\frac{5}{2} \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$-x^2 + mx + 1 < 0 \Leftrightarrow mx < x^2 - 1 \Leftrightarrow m < x - \frac{1}{x}$$

$$y = x - \frac{1}{x}, \frac{1}{2} < x < 2 \quad \nearrow \quad x - \frac{1}{x} \in (-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) \quad \therefore m \leq -\frac{5}{2}$$

【例 8】不等式 $x^2 + mx + 1 < 0$ 在 $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ 上有解，则实数 m 的取值范围是 _____

参变分离

$\therefore \exists x \in D$, 使得 $x^2 + mx + 1 < 0 \rightarrow m_{\max} < f(x)_{\min}$

$$mx < -x^2 - 1$$

$$m < -x - \frac{1}{x}$$

$$m < -(x + \frac{1}{x})$$

$$x + \frac{1}{x} \in [2, 5)$$

对勾函数

$$-(x + \frac{1}{x}) \in (-5, -2]$$

$$m < -2$$

【例 6】若关于 x 的不等式 $x^2 - 4x - 2 - a > 0$ 在区间 $(1, 4)$ 内有解，则 a 的取值范围是 _____.

恒成立

如果是能成立问题(有解), 则可转化为恒成立然后取补集。

一元二次方程根的分布

给定含参一元二次方程在某区间范围内有根，让求参数的取值范围，这类题分不规定根的个数和规定根的个数两类，前者往往采用参变分离的方法求解，后者则采用参变分离法或图象法求解，若用图象法，则作图时一般重点关注端点值、判别式、对称轴这三个要素。

题组一：不规定根的个数

【例1】方程 $x^2 - 4x + \frac{4}{m} = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有根，则实数 m 的取值范围为_____。

参数在分母上

转化为： $\frac{4}{m} = 4x - x^2$

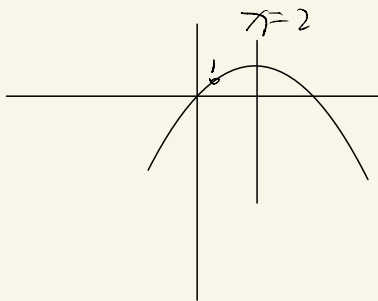
$$4x - x^2 \in [4, -\infty)$$

$$\frac{4}{m} \leq 4$$

$$\frac{1}{m} \leq 1$$

$$1 - \frac{1}{m} \leq 0$$

$$\frac{m-1}{m} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} m(m-1) \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 0 \text{ 或 } m \geq 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$$



【例 2】方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上有根，则实数 a 的取值范围是_____.

$$ax = x^2 + 1$$

$$a = x + \frac{1}{x}$$

$$a \in (2, \frac{5}{2})$$

【例 3】方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有根，则实数 a 的取值范围为_____.

$$ax^2 = -2x - 1 \Leftrightarrow a = -\frac{2x+1}{x^2}$$

$$a = (\frac{1}{x})^2 - 2\frac{1}{x}$$

使 $\frac{1}{x} = t$, 则 $t \in (0, 1)$

$$a = -(t^2 + 2t)$$

$$t^2 + 2t \in (0, 3)$$

$$a \in (-3, 0)$$

【例 4】方程 $x^2 + \frac{1}{x^2} + a \cdot (x + \frac{1}{x}) - a + 5 = 0$ 有正根，则实数 a 的取值范围为_____.

$$\text{设 } x + \frac{1}{x} = t, \text{ 则 } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2, x > 0, \text{ 则 } t > 2$$

$$(x + \frac{1}{x})^2 - 2 + a \cdot (x + \frac{1}{x}) - a + 5 = 0$$

$$t^2 + at - a + 3 = 0$$

$$a(t-1) = -t^2 - 3$$

$$a = \frac{-t^2 - 3}{t-1}$$

$$\text{令 } t-1=u, u>1$$

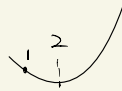
$$a = \frac{-(u+1)^2-3}{u}$$

$$a = \frac{-(u^2+2u+1)-3}{u}$$

$$= \frac{-u^2-2u-4}{u}$$

$$= -u-2-\frac{4}{u}$$

$$= -u+\frac{4}{u}-2$$



$$u+\frac{4}{u} \geq 4$$

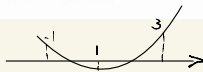
$$-(u+\frac{4}{u}) \leq -4$$

$$a \leq -6$$

【例 5】方程 $kx^2 - (2k+1)x - 3 = 0$ 的两根 x_1, x_2 满足 $-1 < x_1 < 1 < x_2 < 3$, 则实数 k 的取值范围为_____.

$$f(x) = kx^2 - (2k+1)x - 3, \quad k \neq 0$$

$$\begin{cases} f(-1) \cdot f(1) < 0 \\ f(1) \cdot f(3) < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (3k-2) \cdot (-k-4) < 0 \\ (-k-4)(3k-6) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < -4 \text{ 或 } k > \frac{2}{3} \\ k < -4 \text{ 或 } k > 2 \end{cases}$$

$$k < -4 \text{ 或 } k > 2$$

$$k < -4 \text{ 或 } k > 2$$

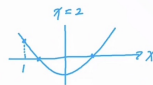
$$k < -4 \text{ 或 } k > 2$$

k 的取值范围为 $k < -4$ 或 $k > 2$

【例 6】方程 $mx^2 - 4mx + 4 = 0 (m \neq 0)$ 在 $(1, +\infty)$ 有两个不相等的实根, 则实数 m 的取值范围为_____.

$$\text{解: } x^2 - 4x + \frac{4}{m} = 0$$

$$\begin{cases} -3 + \frac{4}{m} > 0 \\ \Delta = 16 - \frac{16}{m} > 0 \\ 2 > 1 \end{cases}$$



【例 7】方程 $ax^2 - x + 2 = 0 (a \neq 0)$ 有两个不相等的实根，若一根大于 1，一根小于 1，则实数 a 的取值范围为_____

$$x^2 - \frac{1}{a}x + \frac{2}{a} = 0$$

将 a 从二次项中提出，比较好操作

$$1 - \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 + \frac{1}{a} < 0 \quad \therefore -1 < a < 0$$



