



三、函数的单调性

1. 函数的单调性：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域是 I ，区间 $D \subseteq I$ ，如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就称 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增，称区间 D 为函数 $f(x)$ 的单调递增区间；特别地，当 $f(x)$ 在定义域上单调递增时，我们就称它是增函数。如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就称 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减，称区间 D 为 $f(x)$ 的单调递减区间；特别地，当 $f(x)$ 在定义域上单调递减时，我们就称它是减函数。

2. 函数单调性的等价定义方法： $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 或 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，则 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增；若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 或 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ，则 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减。

3. 函数的最大值：一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 M 满足：

(1) $\forall x \in I$ ，都有 $f(x) \leq M$ ；(2) $\exists x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = M$ ；

那么，我们称 M 是函数 $y = f(x)$ 的最大值。

4. 函数的最小值：一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 m 满足：

(1) $\forall x \in I$ ，都有 $f(x) \geq m$ ；(2) $\exists x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = m$ ；

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 D 上具有单调性，则：

- 1) 若 C 为常数，则函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(x) + C$ 有相同的单调性。
- 2) 在区间 D 上，若 $a > 0$ ，则 $af(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相同；若 $a < 0$ ，则 $af(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反。
- 3) 若 $f(x) \geq 0$ ，则 $y = \sqrt{f(x)}$ 与 $y = f(x)$ 单调性相同。
- 4) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 单调性相同，则 $f(x) + g(x)$ 的单调性与它们也相同。
- 5) $f(x) > 0$ ， $g(x) > 0$ ，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 单调性相同，则 $f(x)g(x)$ 的单调性与它们也相同。

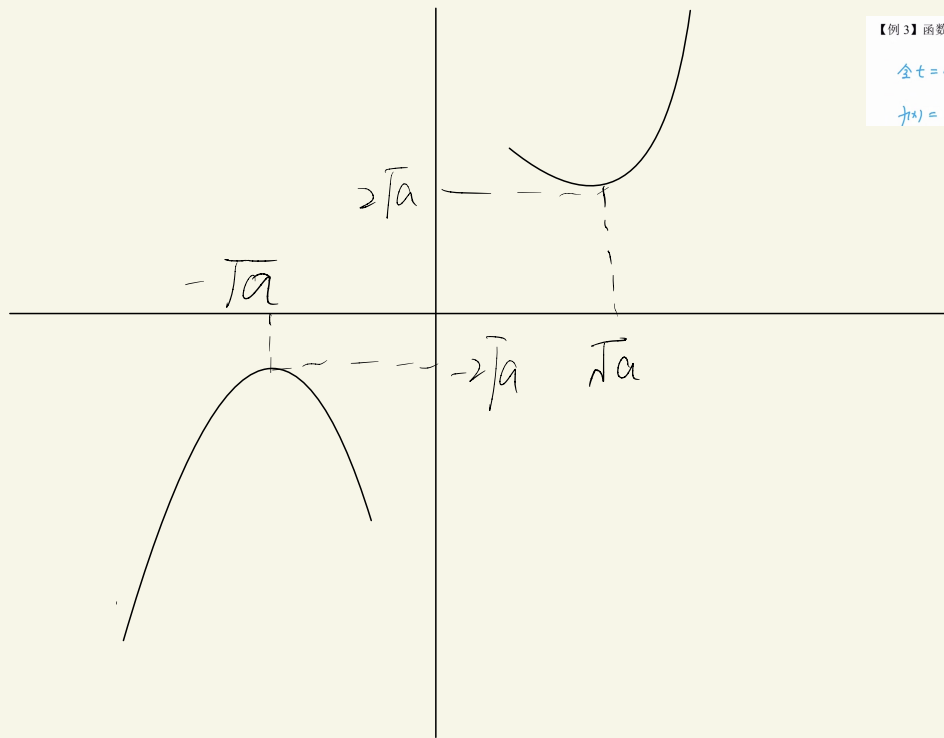
【例 3】函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为 _____。

令 $t = x + 1$ ，则 $t \in [1, 2]$ ， $x = t - 1$

$$f(x) = \frac{(t-1)^2 - 2(t-1) + 1}{t} = \frac{t^2 - 4t + 4}{t} = t + \frac{4}{t} - 4$$

用换元法算出双勾函数后

双勾函数: $f(x) = x + \frac{a}{x}$



【例 3】函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为_____.

令 $t = x + 1$, 则 $t \in [1, 2]$, $x = t - 1$

$$f(x) = \frac{(t-1)^2 - 2(t-1) + 1}{t} = \frac{t^2 - 4t + 4}{t} = t + \frac{4}{t} - 4$$

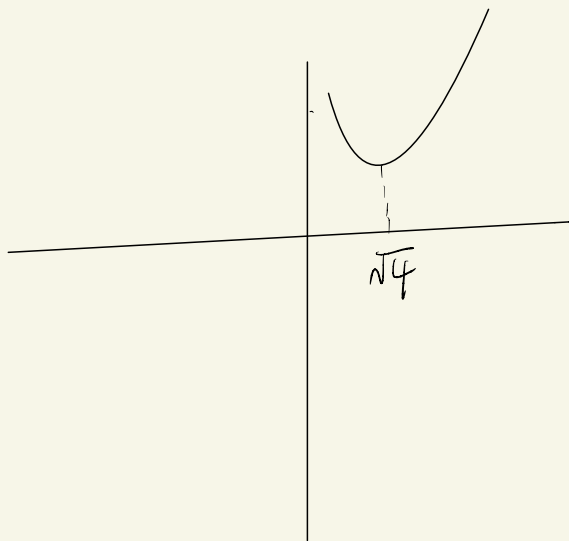
【例 3】函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为 $[0, 1]$

$$\text{设 } x+1=t \quad t \in [1, 2]$$

$$f(x) = \frac{(t-1)^2 - 2(t-1) + 1}{t} = \frac{t^2 - 2t + 1 - 2t + 2 + 1}{t} = \frac{t^2 - 4t + 4}{t}$$

$$= t + \frac{4}{t} - 4$$

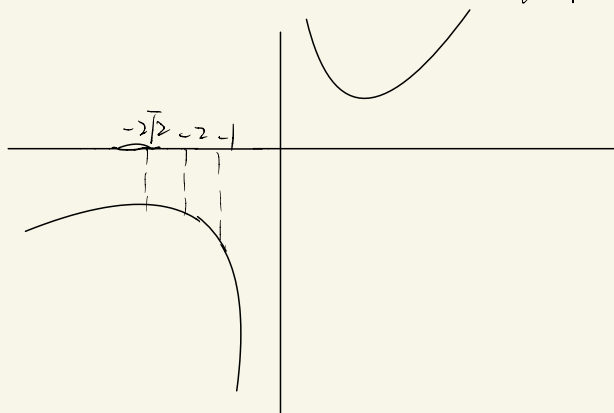
∴ 值域为 $[0, 1]$



【例 4】函数 $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$ 在 $[0,1]$ 上的值域为 $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$

设 $x-2=t$, $t \in [-2, -1]$

$$f(x) = \frac{t}{(t+2)^2+4} = \frac{t}{t^2+4t+8} = \frac{1}{t+\frac{8}{t}+4}$$



【例 3】已知函数 $f(x) = -x^2 - \sqrt{2x-2}$, 则不等式 $f(x^2) > f(2-x)$ 的解集为 $[-2, -1]$

$$\therefore f(x) = -x^2 - \sqrt{2x-2}$$

$$\therefore \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 定义域为 $(1, +\infty)$

当 $x > 1$ 时, $-x^2$ 为单调递减的函数, $-\sqrt{2x-2}$ 也为单调递减。

$$\therefore \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ 2-x \geq 1 \\ x^2 < 2-x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1 \\ x \leq 1 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

复合函数

求单调时,
先求定义域

$$y = f(g(x)) \quad y = f(u) \quad u = g(x) \quad \text{同增异减}$$

$$x \in [a, b] \quad g(x) \in [c, d] \quad u \in [c, d]$$

$$u = g(x) \quad y = f(u) \quad y = f(g(x)) \quad a \leq x$$

单调性



【例 2】已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2, 4]$ ，且 $f(x)$ 在 $[-2, 1]$ 上单调递减，在 $[1, 4]$ 上单调递增，则函数 $y = f(3x-2)$ 的单调递增区间是_____。

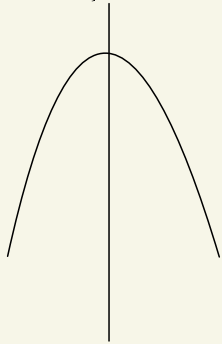
$$-2 \leq 3x-2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

∴ 递增区间为 $[1, 2]$

单调性求参

【例 1】若函数 $f(x) = -x^2 + ax + 1$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

对称轴



$$x = -\frac{a}{2}$$

当 $\frac{a}{2} \geq 1$ 时 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 单调递增

$$\therefore a \geq 2$$

【例3】已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x + a^2 - 2a - 3, & x > 0 \\ -x^2 + (4-a)x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 $[3, 4]$

思路: 先每一段考虑, 之后结合考虑

① $(a-1)x + a^2 - 2a - 3$ 单调递增 $\Rightarrow a > 1$

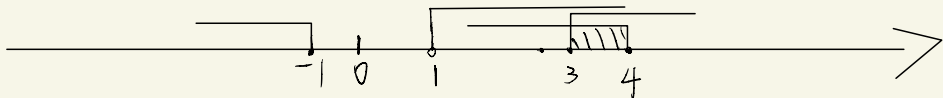
② $-x^2 + (4-a)x$ 在 $x \leq 0$ 时单调递增 $\Rightarrow \frac{4-a}{2} \geq 0$
 $a \leq 4$

③ $\therefore$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

$\therefore a^2 - 2a + 3 \geq 0$ ($-x^2 + (4-a)x$ 交 y 轴于 0)

$\therefore (a-3)(a+1) \geq 0$

$a \geq 3$ 或 $a \leq -1$



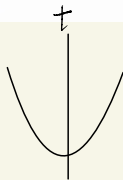
分段函数的最值问题

【例 2】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2tx + t^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + t, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 t 的取值范围是

- (A) $[-1, 2]$ (B) $[-1, 0]$ (C) $[1, 2]$ (D) $[0, 2]$

① $x^2 - 2tx + t^2$ 的最小值为 t

$f(0)$ 只能落在对称轴左边，因为
如果落在右边， $f(0)$ 将不是最小值
 $\therefore t \geq 0$



② $(x + \frac{1}{x} + t)_{\min} = 2 + t$

$$(x^2 + 2tx + t^2)_{\min} = t^2$$

$$t^2 \leq 2 + t$$

$$t^2 - t - 2 \leq 0$$

$$(t-2)(t+1) \leq 0$$

$$-1 \leq t \leq 2$$

$\therefore t$ 的取值范围为 $-1 \leq t \leq 2 \vee t \geq 0 = [0, 2]$