



$f(x)$	$g(x)$	$f(x) \pm g(x)$	$f(x)g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$
偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数
偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数	奇函数
奇函数	奇函数	偶函数	偶函数	偶函数

① 若 $ax^2 + bx + c$ 为偶函数, $b=0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=0$ 关于 y 轴对称

② 若 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ 为奇函数

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 \dots = 0$$

若为偶函数, $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$

若一个数为奇函数, 且定义域内包括 0, 则 $f(0)=0$

- 一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 若 $\forall x \in I$, 都有 $-x \in I$, 且 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数.
- 一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 若 $\forall x \in I$, 都有 $-x \in I$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数.
- 图象特征: 偶函数的图象关于 y 轴对称, 奇函数的图象关于原点成中心对称.
- 奇偶性与单调性: 偶函数在关于原点对称的两个区间上单调性相反; 奇函数在关于原点对称的两个区间上单调性相同.

【例 4】已知函数 $f(x) = ax^3 + bx$, 若 $f(2)=1$, 则 $f(-2) = \underline{-1}$.

奇

$$f(-x) = -f(x) \quad f(-2) = -f(2) = -1$$

x^3 为奇函数, ax^3 也为奇函数
 x 为奇函数, bx 也为奇函数

【例 6】已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 是定义在 $[a, 2+a]$ 上的偶函数, 则 $a+b = \underline{-1}$.

偶函数关于 y 轴对称

$$a = -a-2$$

$$a = -1$$

$$-\frac{b}{2a} = -1+2+(-1)=0$$

$$b=0$$

$$\therefore a+b = -1$$

【例 8】已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x + a - 1$, 则 $f(-2) = \underline{-2}$.

“定义域内包括 0”

$$\therefore f_0 = 0$$

$$\therefore x \geq 0 \text{ 时 } a-1=0, a=1$$

$$\therefore x \geq 0 \text{ 时 } f(x) = x$$

$$f(-x) = -f(x) = -2$$

求 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上的表达式

【例 2】已知 $f(x)$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的奇函数, 且当 $-2 < x < 0$ 时, $f(x) = x + 1$, 则 $f(x) = \underline{\quad}$.

$$-f(x) = f(-x) = x+1$$

$$f(x) = -x-1$$

$$f(x) = x-1$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (0 < x < 2) \\ 0 & (x=0) \\ x+1 & (-2 < x < 0) \end{cases}$$

【例 7】已知函数 $f(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数，则 $a = \underline{\quad}$.

∵ f 为奇函数，则 $(x+1)(x+a)$ 为偶函数

($\frac{\text{奇}}{\text{偶}} = \text{奇函数}$)

∴ $f(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数时， $x^2 + (a+1)x + a$ 为偶函数 $\longrightarrow -\frac{a+1}{2} = 0, a = -1$

奇偶性与函数不等式

1. $f(x)$ 奇 $f(a) + f(b) < 0 \Leftrightarrow f(a) < -f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(-b)$

2. $f(x)$ 偶 $f(a) < f(b) \Leftrightarrow f(\underline{|a|}) < f(\underline{|b|})$

【例 3】若定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减，且 $f(1-m) < f(m)$ ，则实数 m 的取值范围是 。

$$f(-x) = f(x) = f(|x|)$$

$$f(1-m) < f(m) \Leftrightarrow f(|1-m|) < f(|m|)$$

$$\begin{cases} |1-m| > |m| \\ -2 \leq 1-m \leq 2 \\ -2 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ 1 \geq m \geq -1 \\ 2 \geq m \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq m \geq -1$$

【例 1】已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 为增函数，则 $f(-x) + f(2x+1) > 0$ 的解集为

$$-f(x) = f(-x)$$

$$f(2x+1) > -f(-x)$$

$$f(2x+1) > f(x)$$

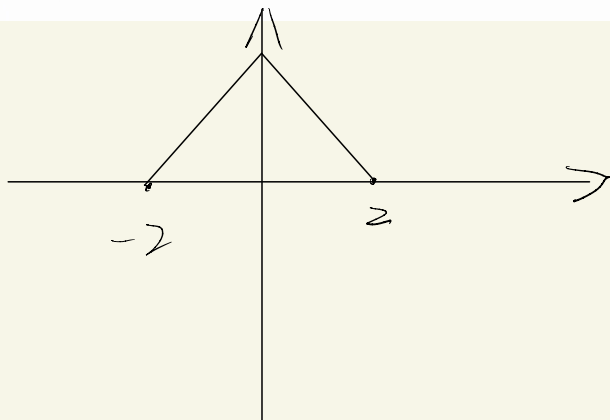
$$\therefore 2x+1 > x$$

$$x > -1$$

$\therefore$ 解集为 $(-1, +\infty)$

奇偶函数图像特征的运用

【例 2】已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 上单调递减， $f(-2)=0$ ，则不等式 $xf'(x-1) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$



$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x-1 < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3 \\ \text{或} & \begin{cases} x < 0 \\ x-1 < -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1 \end{aligned}$$

【例 3】已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 为减函数， $f(1)=-1$ ，则不等式 $-1 \leq f(x+2) \leq 1$ 的解集为 $[-3, -1]$

$$-1 \leq f(x+2) \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x+2) \leq f(-1) \Rightarrow -1 \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1$$