



函数-Function

一、定义

1. 一个 x 只能对应一个 y , 而一个 y 可对应多个 x

定义域与对应关系 能推导出值域

2. 设 A, B 为两非空数集, A 中任意数 x 按某种关系 f , 在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和其对应, 那就称 $f: A \rightarrow B$, x 的取值范围称为定义域, y 的取值范围称为值域

二、定义域求参

遇到 ax^2+bx+c 时, 需考虑 a 为 0 的情况

1. $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 求 $f(g(x))$ 的定义域.

① 定义域是 x 的范围

$f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 求 $f(2x-1)$ 的定义域

② $f(\quad)$: 括号范围不变.

$$1 \leq x \leq 2 \quad 1 \leq 2x-1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$f(2x-1)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(x)$ 和 $f(x-1)$ 的定义域

$$\therefore 0 \leq x \leq 1$$

$$\therefore -2 \leq 2x-2 \leq 0$$

$\downarrow$
 $-2 \leq x \leq 0 \rightarrow \because$ 括号为范围不变

$$\therefore -2 \leq x-1 \leq 0 \\ -1 \leq x \leq 1$$

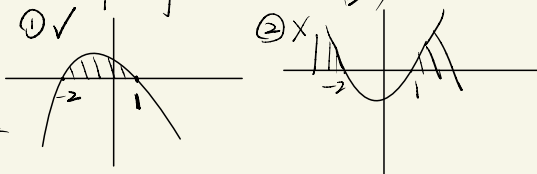
【例 1】已知函数 $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+2}$ 的定义域为 $[-2, 1]$, 则 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$ax^2+bx+2 \geq 0$$

① $a=0$ 时 $bx+2 \geq 0$, 无法取到 $-2 \leq x \leq 1$ (舍)

② $a \neq 0$ 时, a 必取 < 0

(若 $a > 0$, 定义域无法使值域 ≥ 0 .)



将-2与1代入式子后可得
$$\begin{cases} 4a-2b+2=0 \\ a+b+1=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=-2$$

【例2】已知函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + 2x + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则实数 a 的取值范围是 $a \geq -1$.

① $a \neq 0$
 $\because ax^2 + 2x + 1$ 在根号下
 $\therefore ax^2 + 2x + 1 \geq 0$
 又 $\because x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ (任实数)
 $\therefore \Delta \leq 0$
 $4 - 4a \leq 0$
 $a \geq 1$

② $a = 0$ 时, $2x + 1 \geq 0$
 $x \geq -\frac{1}{2}$
 (不符合定义域)

【例3】已知函数 $f(x) = \frac{x}{ax^2 + 2x + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则实数 a 的取值范围是 $a > -1$.

$ax^2 + 2x + 1 \neq 0$ (因为作为分母)
 ① $a = 0$ 时, $2x + 1$ 可为 0 (舍)
 ② $a \neq 0$ 时 有使 $ax^2 + 2x + 1 \neq 0$ 则 $\Delta < 0$ $4 - 4a < 0$
 $a > 1$

【例4】已知函数 $y = \frac{ax + 1}{a^2x^2 + 4ax + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则实数 a 的值为 0.

① $a = 0$ 时, $y = \frac{1}{1} = 1$, 成立

② $a \neq 0$ 时, 若想使 $f(x)$ 成立, 则使 $a^2x^2 + 4ax + 1$ 的 $\Delta < 0$

$\because$ 其 Δ 为 $16a^2 - 4a^2 = 12a^2$ 始终大于 0
 (舍)

二、求值域

【例2】函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ 的值域为_____.

使用分离常数法

$$f(x) = \frac{2(x-2)+5}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$$

$$2 + \frac{5}{x-2} \neq 2$$

∴ 值域为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

【例3】函数 $f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2+1}$ 的值域为 $[-2, 2]$.

$$f(x) = \frac{2(x^2+1)-4}{x^2+1} = 2 - \frac{4}{x^2+1}$$

$$x^2 \geq 0, x^2+1 \geq 1, \quad 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1, \quad 0 < \frac{4}{x^2+1} \leq 4$$

$$\therefore -2 \leq 2 - \frac{4}{x^2+1} < 2$$

遇到根号, 用换元

① 使用分离常数法, 分出常数与分式

② 算出分母取值范围

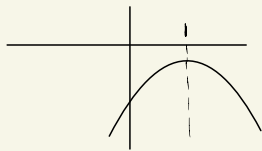
($a > 1$ 则 $0 < \frac{1}{a} < 1$)

【例 4】函数 $f(x) = 2\sqrt{x-2} - x$ 的值域为 $[-\infty, -1]$

设 $\sqrt{x-2}$ 为 t $x \geq 2 \Rightarrow t \geq 0$

$$f(x) = 2t - (t^2 + 2) = -t^2 + 2t - 2$$

$$-t^2 + 2t - 2 \leq -1$$



三、求函数解析式

① 待定系数法

【例 1】已知 $f(x)$ 为一次函数， $f(f(x)) = 4x + 3$ ，则 $f(x) = \underline{2x+1}$ 。

$$\text{设 } f(x) = kx + b$$

$$\text{则 } f(f(x)) = k(kx+b) + b = k^2x + b(k+1)$$

$$\therefore k=2, b=1$$

② 换元法

【例 3】已知 $f(x+1) = x^2 + 2x$ ，则 $f(x) = \underline{\quad}$ 。

法 1: 令 $x+1 = t$ ，则 $x = t-1$

$$f(t) = (t-1)^2 + 2(t-1) = t^2 - 1$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

(关系不变)

法 2: $f(x+1) = (x+1)^2 - 1$

$$f(x) = x^2 - 1$$

三、函数的单调性

1. 函数的单调性：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域是 I ，区间 $D \subseteq I$ ，如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就称 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增，称区间 D 为函数 $f(x)$ 的单调递增区间；特别地，当 $f(x)$ 在定义域上单调递增时，我们就称它是增函数。如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就称 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减，称区间 D 为 $f(x)$ 的单调递减区间；特别地，当 $f(x)$ 在定义域上单调递减时，我们就称它是减函数。

2. 函数单调性的等价定义方法： $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 或 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，则 $f(x)$ 在区

间 D 上单调递增；若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 或 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ，则 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减。

3. 函数的最大值：一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 M 满足：

(1) $\forall x \in I$ ，都有 $f(x) \leq M$ ；(2) $\exists x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = M$ ；

那么，我们称 M 是函数 $y = f(x)$ 的最大值。

4. 函数的最小值：一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 m 满足：

(1) $\forall x \in I$ ，都有 $f(x) \geq m$ ；(2) $\exists x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = m$ ；

5. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 D 上具有单调性，则：

(1) 若 C 为常数，则函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(x) + C$ 有相同的单调性。

(2) 在区间 D 上，若 $a > 0$ ，则 $af(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相同；若 $a < 0$ ，则 $af(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反。

(3) 若 $f(x) \geq 0$ ，则 $y = \sqrt{f(x)}$ 与 $y = f(x)$ 单调性相同。

(4) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 单调性相同，则 $f(x) + g(x)$ 的单调性与它们也相同。

(5) $f(x) > 0$ ， $g(x) > 0$ ，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 单调性相同，则 $f(x)g(x)$ 的单调性与它们也相同。

【例 3】函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为 _____。

$$\text{令 } t = x + 1, \text{ 则 } t \in [1, 2], \quad x = t - 1$$

$$f(x) = \frac{(t-1)^2 - 2(t-1) + 1}{t} = \frac{t^2 - 4t + 4}{t} = t + \frac{4}{t} - 4$$