



1. 函数 $f(x) = \log_a \frac{m+x}{m-x} (m \neq 0)$ 和 $f(x) = \log_a \frac{x+m}{x-m} (m \neq 0)$ 都是奇函数.

2. 函数 $f(x) = \log_a (\sqrt{1+m^2x^2} \pm mx)$ 为奇函数.

【例 1】若函数 $f(x) = \lg \frac{a+x}{1-x}$ 是奇函数，则实数 $a = \underline{1}$.

【例 2】若函数 $f(x) = \lg(\sqrt{1+4x^2} + ax)$ 是奇函数，则实数 $a = \underline{\pm 2}$.

【例 3】(2015 · 新课标 I 卷) 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a = \underline{1}$.

奇 × 奇

$y = x$ 和 $y = \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 奇 当 $y = \log(\sqrt{1+m^2x^2} \pm mx)$ 时为奇函数

【例 4】已知函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \ln(\sqrt{x^2+1} + x)}{x^2+1}$ 的奇函数，最大值为 M ，最小值为 m ，则 $M+m = \underline{2}$.

$$f(x) = \frac{x^2+1+2x+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{x^2+1} = 1 + \frac{2x+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{x^2+1} = 1 + g(x)$$

$g(x)$ 为奇函数

当 $y = f(x)$ 奇 $g(x) = f(x) + a$

$$\textcircled{1} g(-x) + g(x) = 2a$$

$$\textcircled{2} g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 2a$$