

1. 函数零点的概念：对于一般函数 $y=f(x)$ ，我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点。^数
2. 方程 $f(x)=0$ 有实数解 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 有零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴有交点.
3. 零点存在定理：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线，且 $f(a)f(b)<0$ ，则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内至少有一个零点，即存在 $c \in (a,b)$ ，使得 $f(c)=0$.

若题干给出含参函数 $f(x)$ 有几个零点，让求参数的取值范围. 这类题可以将方程 $f(x)=0$ 等价变形成 $a=g(x)$ 这种形式再研究水平直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象的交点个数，解决问题；也可以将 $f(x)=0$ 等价变形成 $g(x)=h(x)$ ，再研究函数 $y=g(x)$ 与 $y=h(x)$ 的图象的交点个数，解决问题. 总之，数形结合研究交点个数，是解决这类问题的核心方法.

【例 2】“ $a<1$ ”是“函数 $f(x)=x^2+2x+a$ 有零点”的（ ）条件.

- (A) 充分不必要 (B) 必要不充分 (C) 充要 (D) 既不充分也不必要

$$f(x) \text{ 有零点} \Leftrightarrow x^2+2x+a=0 \text{ 有实根} \Leftrightarrow \Delta = 4-4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$$

$$a < 1 \quad (a \leq 1)$$

【例 5】设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[3.2]=3$ ， $[-1]=-1$ ， $[-0.5]=-1$. 已知 x_0 是方程 $\ln x + 2x - 5 = 0$ 的实

根，则 $[x_0] = \underline{2}$.

$$f(x) = \ln x + 2x - 5 \quad (x > 0) \quad \nearrow \text{根据零点存在理论} \rightarrow \text{单调递增} \rightarrow \text{只有一个零点.}$$

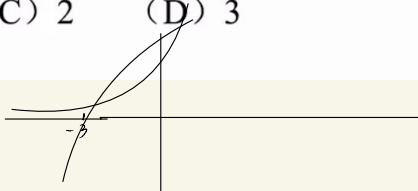
$$f(1) = -3 < 0 \quad f(2) = \ln 2 - 1 < 0 \quad f(3) = \ln 3 + 1 > 0 \quad \Rightarrow x \in (2, 3)$$

$$\downarrow \\ \ln e = 1 \\ 2 < e < 3$$

【例 6】方程 $\log_2(x+4)=3^x$ 的实根个数为 (C) 可画图研究实根个数

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

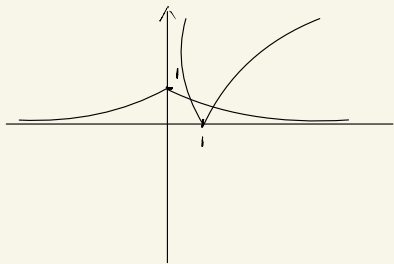
$x+4>0, x>-4, x \in (-4, 0)$



【例 8】函数 $y=(\frac{1}{2})^{|x|}-|\ln x|$ 的零点个数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

$$(\frac{1}{2})^{|x|} - |\ln x| = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{|x|} = |\ln x|$$



【例 9】若函数 $f(x) = 2^x - \frac{1}{x} - a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点，则实数 a 的取值范围是 $(1, \frac{7}{2})$

在 $(1, 2)$ 中, $x=1$ 时最小

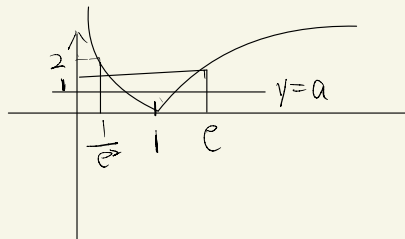
$$\begin{cases} 2^1 - \frac{1}{1} - a < 0 \\ 2^2 - \frac{1}{2} - a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a < 0 \\ 4 - \frac{1}{2} - a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 < a < \frac{7}{2}$$

二、半分离和全分离算零点

若题干给出含参数函数 $f(x)$ 有几个零点，让求参数的取值范围。这类题可以将方程 $f(x) = 0$ 等价变形为 $a = g(x)$ 这种形式再研究水平直线 $y = a$ 与函数 $y = g(x)$ 的图象的交点个数，解决问题；也可以将 $f(x) = 0$ 等价变形为 $g(x) = h(x)$ ，再研究函数 $y = g(x)$ 与 $y = h(x)$ 的图象的交点个数，解决问题。总之，数形结合研究交点个数，是解决这类问题的核心方法。

【例 2】若函数 $f(x) = |\ln x| - a$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上有且仅有两个零点，则实数 a 的取值范围是 $[0, 1)$

$$|\ln x| - a = 0 \Rightarrow |\ln x| = a$$



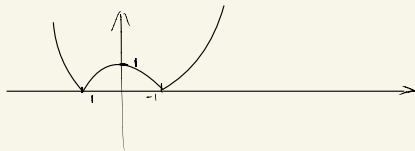
$$\text{当 } x = \frac{1}{e}, |y| = 2$$

$$x = e, y = 1$$

$y = a$ 在 $(0, 1)$ 之间与 $|\ln x|$ 有两个交点
 还能取 0, 因为 0 时只有一个交点

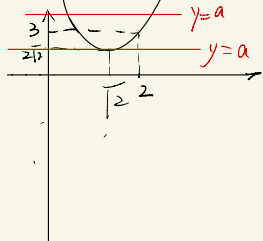
【例 3】若方程 $|x^2 - 1| - a = 0$ 有且仅有 3 个不相等的实数根，则实数 $a = \underline{1}$.

$|x^2 - 1| = a \Rightarrow$ 当 a 为 1 时有 3 个不相等实根

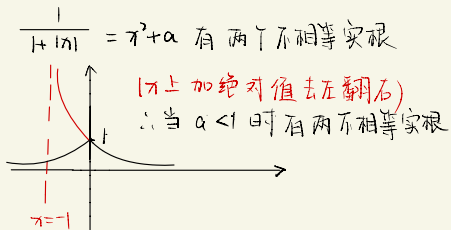


【例 4】函数 $f(x) = x^2 - ax + 2$ 在 $(0, 2)$ 上有且仅有 1 个零点，则实数 a 的取值范围是 $(2, +\infty) \cup \{2\}$.

$x^2 + 2 - ax = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = ax$ 有一个零点 $\Rightarrow x + \frac{2}{x} = a$ 有一个零点



【例 5】若方程 $\frac{1}{1+|x|} - x^2 - a = 0$ 有两个不相等的实根，则实数 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$



【例 6】(2018 · 新课标 I 卷) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + x + a$, 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围

- (A) $[-1, 0)$ (B) $(0, +\infty)$ (C) $[-1, +\infty)$ (D) $[1, +\infty)$

将比较难处理的分离, 其余留下
(分段讨论)