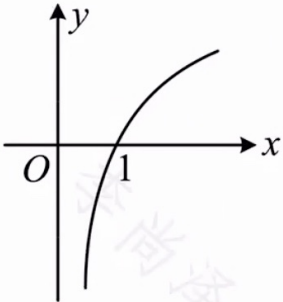
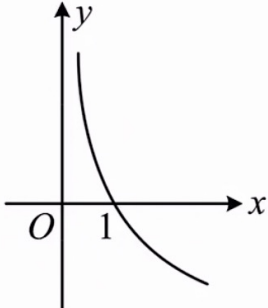




1. 对数函数的概念: 一般地, 函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 叫做对数函数, 其中 x 是自变量, 定义域是 $(0, +\infty)$.

$y = \log_a x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	$\mathbf{R}$	
性质	过点 $(1, 0)$, 即当 $x = 1$ 时, $y = 0$	
	当 $x > 1$ 时, $y > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$	当 $x > 1$ 时, $y < 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$
	在 $(0, +\infty)$ 上单调递增	在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

同正异负 $\rightarrow$ 底数和真数
是否同时在 $(0, 1)$ 或 $(1, +\infty)$

$$\log_3 2 > 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$$

$$\log_3 \frac{1}{2} < 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 2 < 0$$

当 y 相同且 $y > 0$ 时, 底数越小, 不越小
当 y 相同且 $y < 0$ 时, 底数越小, 不越大

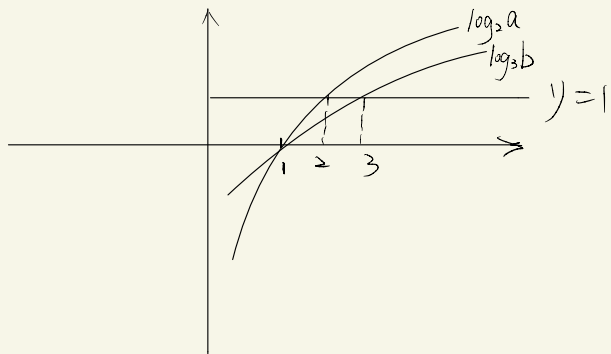
3. 一般地, 指数函数 $y = a^x$ 和对数函数 $y = \log_a x$ 互为一对反函数, 它们的定义域和值域正好互换, 图象关于直线 $y = x$ 对称.

定: $\mathbf{R}$ 值: $(0, +\infty)$
值: $(0, +\infty)$ 定: $\mathbf{R}$

4. 几类函数的增长差异: 设 $y_1 = a^x (a > 1)$, $y_2 = mx^\alpha (m > 0, \alpha > 1)$, $y_3 = kx (k > 0)$, $y_4 = \log_a x (a > 1)$, 尽管在 $(0, +\infty)$ 上, 这几个函数都单调递增, 但 y_1 和 y_2 增长得越来越快, y_3 的增长速率保持不变, y_4 的增长速率越来越慢, 所以必定存在 $x_0 > 0$, 使得当 $x > x_0$ 时, 总有 $a^x > mx^\alpha > kx > \log_a x$.

【例 2】(多选) 已知 $\log_2 a = \log_3 b$, 则下列关系中可能成立的是 (B, D)

- (A) $a > b > 1$ (B) $b > a > 1$ (C) $0 < a < b < 1$ (D) $0 < b < a < 1$



$$\begin{aligned} \log_2 a &= 1 & a &= 2 \\ \log_3 b &= 1 & b &= 3 \end{aligned}$$

【例 3】函数 $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$; 函数 $y = \sqrt{\lg(x-1)}$ 的定义域为 $[2, +\infty)$

$$\begin{aligned} 1) \quad & x^2 - 2x - 3 > 0 \\ & (x-3)(x+1) > 0 \\ & x > 3 \text{ 或 } x < -1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \begin{cases} \lg(x-1) \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg_{10}(x-1) \geq 0 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2 \end{aligned}$$

【例 4】比较下列各组中 a 和 b 的大小:

- (1) $a = 3\log_4 5$, $b = 2\log_2 3$; (2) $a = \log_3 0.2$, $b = \log_4 0.2$;

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2} \log_2 5 & b &= 2\log_2 3 & 12) \quad \log_a b &= \frac{1}{\log_b a} \\ &= \log_2 5^{\frac{3}{2}} & &= \log_2 3^2 & a &= \frac{1}{\log_{0.2} 3} & b &= \frac{1}{\log_{0.2} 4} \\ &= \log_2 \sqrt{5^3} & &= \log_2 9 & \log_{0.2} 3 &< \log_{0.2} 4 & \therefore a &> b \end{aligned}$$

$$\therefore a > b$$

【例 5】已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$, $b=\log_2 \frac{1}{3}$, $c=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 (C)

(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $c > a > b$ (D) $c > b > a$

① $a > 0$

a 在 2^x 上

2^x 为单调递增

$\therefore a < 1 = 2^0$

② b 在 $\log_2 x$ 上

$0 < x < 1$ 时, $y < 0$

$\therefore b < 0$

③ c 在 $\log_{\frac{1}{2}} x$ 上

$x < 0$ 时 $y > 0$

$\therefore c > 0$

当 $y=1$ 时 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} x$ 为单调递减

$\therefore c > 1$

(1) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} (4-x)$; (2) $\log_x \frac{1}{2} > 1$; (3) $\log_a x > \log_a (x^2 - 2)$.

$$(1) \begin{cases} x < 4-x \\ x > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x > 0 \text{ 且 } x \neq 1 \\ \log_x \frac{1}{2} > \log_x x \end{cases}$$

① $0 < x < 1$ 时 $\log_x \frac{1}{2} > \log_x x$

$$\frac{1}{2} < x$$

$$\frac{1}{2} < x < 1$$

② $x > 1$ 时, $\log_x \frac{1}{2} > \log_x x$

$$x < \frac{1}{2}$$

(无交集)

$$(3) \begin{cases} x > 0 \text{ 且 } x \neq 1 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ 且 } x \neq 1 \\ x^2 > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ 且 } x \neq 1 \\ x > \sqrt{2} \text{ 或 } x < -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x > \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \quad 0 < a < 1, \quad x > \sqrt{2} \quad \textcircled{2} \quad a > 1, \quad x < \sqrt{2} \\
 & \quad x < x^2 - 2 \quad \quad \quad x > x^2 - 2 \\
 & x^2 - x - 2 > 0 \quad \quad \quad x^2 - x - 2 < 0 \\
 & (x-2)(x+1) > 0 \quad \quad \quad \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x > \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} < x < 2 \\
 & x > 2 \quad \text{或} \quad x < -1 \\
 & x > 2 \\
 & (\sqrt{2}, 2) \cap (2, +\infty)
 \end{aligned}$$

【例 7】设函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，则 $f(2) = \underline{\quad}$.

知识点： $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 关于 $y = x$ 对称

$$f(1) = \log_2 1$$

$$f(2) = \log_2 2 = 1$$