



1. 函数 $f(x) = \underline{a^x + a^{-x}}$ 为偶函数, 函数 $g(x) = a^x - a^{-x}$ 为奇函数.

2. 函数 $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ 是奇函数.

【例 1】若 $f(x) = 2^x + m \cdot 2^{-x} (x \in \mathbf{R})$ 是偶函数, 则实数 $m = \underline{1}$.

$$f(1) = f(-1)$$

$$f(1) = f(-1)$$

$$2 + \frac{1}{2}m = \frac{1}{2} + 2m$$

$$(2 - \frac{1}{2})m = 2 - \frac{1}{2}$$

$$m = 1$$

【例 2】若函数 $f(x) = 2^{x+1} + m \cdot 2^{-x} (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数, 则实数 $m = \underline{-2}$.

$$\text{法 1: } -f(x) = f(-x)$$

$$-f(1) = f(-1)$$

$$-(2^2 + m \cdot 2^{-1}) = 2^0 + 2m$$

$$-4 - \frac{m}{2} = 1 + 2m$$

$$-5 = \frac{5}{2}m$$

$$m = -2$$

$$\text{法 2: } f(0) = 0$$

【例 5】若函数 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - a}$ 是奇函数, 则使 $f(x) > 3$ 成立的 x 的取值范围是_____.

当 $f(x) = \frac{2^x+1}{2^x-1}$ 时, 其为奇函数

$$\textcircled{1} \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } \frac{2^x+1}{2^x-1} > 3$$

$$(x > 0) \quad \begin{aligned} 2^x+1 &> 3 \cdot 2^x-3 \\ 2 \cdot 2^x &< 4 \\ 2^x &< 2 \\ 0 &< x < 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } \frac{2^x+1}{2^x-1} > 3$$

$$(x < 0) \quad \begin{aligned} 2^x+1 &< 3 \cdot 2^x-3 \\ 2 \cdot 2^x &> 4 \\ 2^x &> 2 \\ (x < 0) \end{aligned}$$

【例 6】已知函数 $f(x) = \frac{1+a \cdot 2^x}{2^x+b}$ 是奇函数, 且 $f(x)$ 的图象过点 $(1, 3)$.

(1) 求实数 a 和 b 的值; (2) 求函数 $f(x)$ 的值域.

当 $f(x) = \frac{2^x+1}{2^x-1}$ 时, 为奇函数

$$\therefore a=1, b=-1$$

$$(2) \frac{2^x+1}{2^x-1} = 1 + \frac{2}{2^x-1} \in$$

$$2^x > 0$$

$$2^x-1 > -1$$

$$0 < 2^x-1 < 0$$

$$\frac{1}{2^x-1} < -1$$

$$\frac{2}{2^x-1} < -2$$

$$1 + \frac{2}{2^x-1} < -1$$

$$\textcircled{2} 2^x-1 > 0 \text{ 时, } \frac{2}{2^x-1} > 0$$

$$1 + \frac{2}{2^x-1} > 1$$

$$\therefore f(x) \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$