

2000 AMC10 解答

Problem 1

考点：数论（质因数分解）

解答： $IMO = 2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29 = 1 \cdot 3 \cdot 667$ ，因此 $I+M+O$ 的最大值是 $1+3+667=671$ ，

选 E。

Problem 2

考点：幂运算

解答： $2000(2000^{2000}) = (2000^1)(2000^{2000}) = 2000^{2001} \Rightarrow \boxed{A}$

Problem 3

考点：百分数

解答：假设一开始有 x 颗。第一天后还剩 $0.8x$ ，第二天后还剩 $0.8^2 x = 0.64x = 32$ ，

解得， $x = 50$ ，选 B。

Problem 4

考点：代数（解方程）

解答：令 x 为每月固定费用， y 为 12 月份连接时间所产生的费用。那么有

$$x + y = 12.48$$

$$x + 2y = 17.54$$

解得,

$$y = 5.06$$

$$x = 7.42$$

因此选 D

Problem 5

考点: 平面几何

解答: 线段 MN 始终满足 $MN = \frac{1}{2}AB$, 因此(a)不正确。对于(b), 我们考虑极限情况, 当 P 位于无穷远, PA 和 PB 无限长, 因此 $\triangle PAB$ 的周长也无限长, 所以周长是变化的, (b)正确。因为 AB 长度固定, 过 P 和 AB 平行的直线与 AB 的距离不变, 为 $\triangle PAB$ 的高, 因此 $\triangle PAB$ 的面积不变, (c)不正确。由于梯形 ABNM 的面积为 $\triangle PAB$ 面积的 $\frac{3}{4}$, 因此也固定不变, (d)不正确。答案选 B。

Problem 6

考点: 数列

解答: 我们取斐波那契数列各项的个位数字, 构成如下数列:

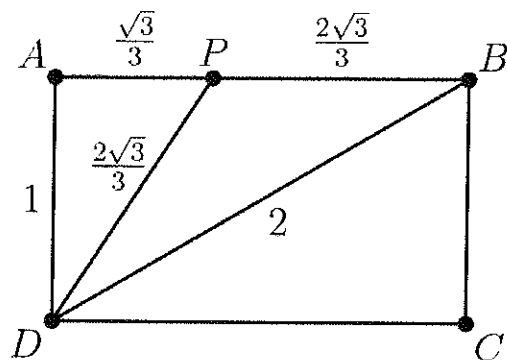
1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6,

可以看到, 最后一个出现的数字是 6 $\Rightarrow$ C

Problem 7

考点：平面几何（特殊直角三角形）

解答：



$AD = 1$. 因为 $\angle ADC$ 被三等分, 所以 $\angle ADP = \angle PDB = \angle BDC = 30^\circ$.

因此, $PD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $DB = 2$, $BP = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 将三边长相加, 得

到周长为 $\boxed{(B) \ 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}}$.

Problem 8

考点：代数（比例）

解答：令 f 为高一学生总数, s 为高二学生总数, 那么 $\frac{2}{5}f = \frac{4}{5}s$, $2f = 4s$, $f = 2s$,

表明高一学生总数是高二学生总数的 2 倍。选 $\boxed{D}$ 。

Problem 9

考点：代数（解方程）

解答：当 $x < 2$ ，则 $x - 2$ 是负数，因此 $|x - 2| = 2 - x = p$ ，解得， $x = 2 - p$ 。

所以 $x - p = (2 - p) - p = 2 - 2p$ 。 (C) $2 - 2p$

Problem 10

考点：平面几何（三角形不等式）

解答：因为 4, 6 和 x 组成三角形的三条边，因此 $2 < x < 10$ ，同理， $2 < y < 10$ ，即 $-10 < -y < -2$ 。将 2 个不等式相加， $-8 < x - y < 8$ ，因此 $0 \leq |x - y| < 8$ ，即 $|x - y|$ 能取到 0 到 8（包括 0，不包括 8）之间的任何正数，那么 $|x - y|$ 不能取到的正数的范围是 $[8, +\infty)$ ，其中最小的正数是 8，选 D。

Problem 11

考点：数论（质数）

解答：这两个质数都是奇质数，所以乘积为奇数，而和为偶数，因此结果是奇数，排除 A, B, D。观察 C 和 E 选项，表明这两个质数之积必须大于 119。而 4 到 18 间的质数是 5, 7, 11, 13, 17，乘积大于 119 的有 11 和 13, 11 和 17 以及 13 和 17，这 3 对对应的结果分别是 $11 \times 13 - (11 + 13) = 119$, $11 \times 17 - (11 + 17) = 159$ ，以及 $13 \times 17 - (13 + 17) = 191$ 。因此只能选 C。

Problem 12

考点：数列

解答：我们观察相邻的两个图形，图 1 比图 0 多 4 个正方形，图 2 比图 1 多 4×2 个，图 3 比图 2 多 4×3 个，因此，图 n 比图 $n-1$ 多 $4n$ 个，即 $a_n - a_{n-1} = 4n$ 。对于这种递推关系式，我们使用累加法：

$$a_n - a_{n-1} = 4n$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = 4(n-1)$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = 4(n-2)$$

...

$$a_1 - a_0 = 4 \cdot 1$$

上面所有式子相加， $a_n - a_0 = 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 4 \times \frac{(1+n) \cdot n}{2} = 2n(n+1)$ ，所以

$a_n = a_0 + 2n(n+1) = 1 + 2n(n+1)$ ，那么 $a_{100} = 1 + 2 \cdot 100 \cdot 101 = 20201$ ，选 C。

Problem 13

考点：排列组合

解答：以 Y, R, G, B, O 分别代表黄, 红, 绿, 蓝, 橙。第一列的 5 个钉子均不同色，为 Y, R, G, B, O；第二列的 4 个钉子均不同色，但此时已经没有橙色钉子可以安排，因此第 2 列的钉子颜色只能是 Y, R, G, B；类似的，第 3 列的 3 个钉子均不同色，但此时已经没有蓝色钉子可选，因此第 3 列的钉子颜色为 Y, R, G.....以此类推，最后一列只能是 Y。

因为最后一列的单个钉子只能是 Y，而第 4 列的钉子只有 Y 和 R 可选，而黄色的那颗钉子不能放在第 4 列第 5 行（不然就有 2 个黄钉在同一行），因此第 4 列的 Y 只能放在第 4 行。同理，其他 3 颗黄色钉子只能放在第 3 列第 3 行，第 2 列第 2 行，第 1 列第 1 行。

第 4 列的第 5 行是 R，而第 3 列的 R 只能放在第 4 行（因为第 5 行已经有了 R，而第 3 行已经放了 Y）。同理，其他列的 R 都只能唯一确定放置位置。

同理，其他所有颜色的钉子也都只能唯一确定放置位置。放置方法如下：

```

Y
R  Y
G  R  Y
B  G  R  Y
O  B  G  R  Y
    
```

因此只有 1 种方法，选 B。

Problem 14

考点：数论（余数）

解答：因为三个数的平均值是个整数的情况数比较少，我们先确定前 3 个分数。

因为 71, 76, 80, 82, 91 模 3 的余数分别是 2, 1, 2, 1, 1, 因此前 3 个分数模 3 的余数之和也应该能被 3 整除，因此前 3 个数只能是 76, 82, 91（不一定是这样的顺序）。那么第 4 和第 5 个数分别是 71、80 或 80、76。因为前 3 个数之和是个奇数，要使

得前 4 个数之和是个偶数, 则第 4 个数必定是奇数, 因此第 4 个数是 71, 第 5 个数是 80, 选 C。

Problem 15

考点: 代数

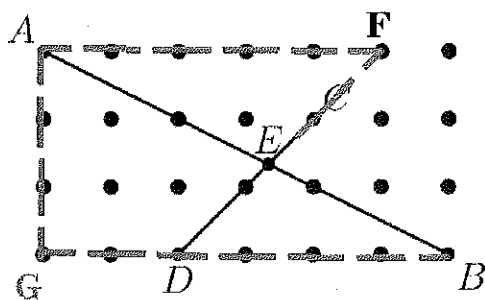
解答: 若 $a \neq 1$, 由 $ab = a - b$ 得, $b = \frac{a}{a+1}$, 代入 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$, 得,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = a \cdot \frac{a+1}{a} + \frac{1}{a+1} - \frac{a^2}{a+1} = a+1 - \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a+1 - a+1 = 2, \text{所以选 E。}$$

Problem 16

考点: 平面几何 (相似三角形)

解答:



延长DE使之通过F点,连接AF和BD。因为 $\triangle AEF \sim \triangle BDE$,所以 $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BD} = \frac{5}{4}$,

而因为在直角 $\triangle ABG$ 中, $AE + BE = AB = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$,所以 $AE = \frac{5}{9}AB = \frac{5\sqrt{5}}{3}$,

选B。

Problem 17

考点: 数论(整数)

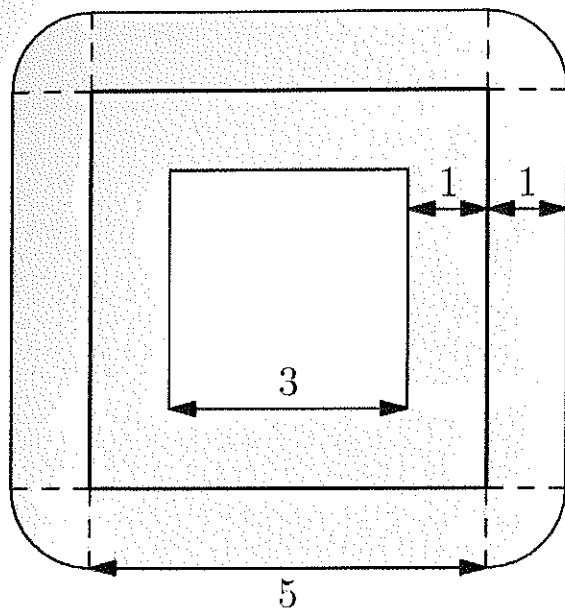
解答: 第一次 Boris 将 1 分硬币投进去, 得到 5 个 25 美分硬币, 即 125 美分。

因为只有当投入 1 分硬币时, 所获得的金额才跟投入的不相等。假设后续的操作相当于投入了 x 个 1 分硬币, 手里剩下 $125-x$ 美分, 但获得的金额是 $125x$, 因此最后手里的总金额为 $125-x+125x=124x+125$, 只有当 $124x+125=745$ 时, $x=5$ 才是个整数, 因此只有 D 才是可能的, 选 D。

Problem 18

考点: 平面几何

解答:

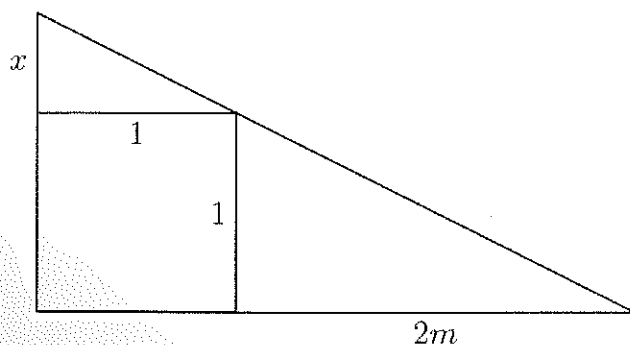


这个问题可以表述成，一个半径为 1 的圆，当圆心在正方形上滑动时，圆所扫过的区域的面积。则在正方形之外扫过的区域由 4 个长为 5km 宽为 1km 的矩形，以及 4 个位于角落的半径为 1km 的 $1/4$ 圆构成。而在正方形内部则是宽度为 1 的正方形环，因此总面积是 $S = (4 \times 1 \times 5 + \pi \times 1^2) + (5^2 - 3^2) = 20 + \pi + 16 \approx 39$ ，选 C。

Problem 19

考点：平面几何（相似）

解答：



不失一般性,令正方形边长为 1.容易证明,这 2 个小的直角三角形是相似三角形。

因为面积为 m 的直角三角形的一条直角边是 1, 则另一条直角边为 $2m$ 。由相似,

$\frac{2m}{1} = \frac{1}{x}$, 其中 x 是另一个小的直角三角形的高, 解得, $x = \frac{1}{2m}$, 那么另一个

小的直角三角形的面积是 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{4m}$ $\boxed{D}$ 。

Problem 20

考点: 代数 (AM-GM)

解答:

$$AMC + AM + MC + CA = (A+1)(M+1)(C+1) - (A+M+C+1) = (A+1)(M+1)(C+1) - 11$$

, 而 $\sqrt[3]{(A+1)(M+1)(C+1)} \leq \frac{(A+1)+(M+1)+(C+1)}{3} = \frac{13}{3}$, 等号成立时, 需满足

$A=M=C=\frac{10}{3}$, 但 A, M, C 均为整数, 因此最能接近这个条件的是:

$A=M=3, C=4$, 此时 $AMC + AM + MC + AC \leq 3 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 69$, 选 C。

Problem 21

考点: 逻辑推理

解答:

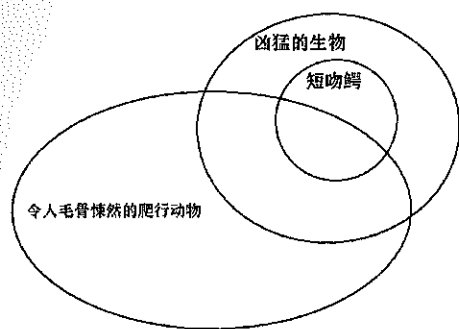


图1

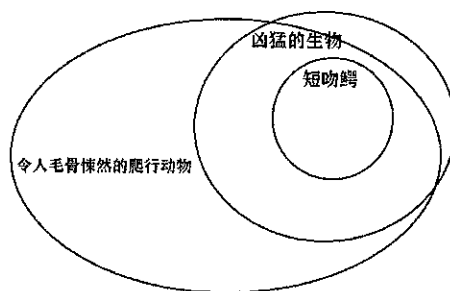


图2

根据题目的条件，可以画出如图 1 和图 2 两种情况。由图 1 看到，有一些短吻鳄不是令人毛骨悚然的爬行动物，所以 I 错。而 II 均符合图 1 和图 2，因此 II 是对的。从图 2 可以看到，所有短吻鳄都是令人毛骨悚然的爬行动物，所以 III 错误。因此答案选 B。

Problem 22

考点：数论（不定方程）

解答：假设牛奶总量为 x 盎司，咖啡总量为 y 盎司，家里有 z 个人。则有

$$\begin{cases} x+y=8z \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{6}y=8 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} x=96-16z \\ y=24z-96 \end{cases}. \text{ 由于 } \begin{cases} \frac{1}{4}x < 8 \\ \frac{1}{6}y < 8 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 24-4z < 8 \\ 4z-16 < 8 \end{cases}, \text{ 解得,}$$

$4 < z < 6$ ，而 z 是个整数， $z=5$ ，选 C。

Problem 23

考点：数据分析（平均数，中位数，众数）

解答：因为 x 的值会影响中位数的大小，所有需要对 x 进行分类讨论。

①若 $x \leq 2$ ，则这列数排序后为 $x, 2, 2, 2, 4, 5, 10$ ，中位数和众数均为 2，则形成常数数列，不符题意。

②若 $2 < x \leq 4$ ，则这列数排序后为 $2, 2, 2, x, 4, 5, 10$ ，中位数为 x ，众数为 2，平均值为 $\frac{25+x}{7}$ ，而因为 $\frac{25+x}{7} - x = \frac{25-6x}{7} > 0$ ，所以这 3 个数从小到大排序是：
 $2, x, \frac{25+x}{7}$ 。因为成等差数列，则 $2 + \frac{25+x}{7} = 2x$ ，解得， $x = 3$ 。

③若 $x > 4$ ，则这列数排序后为 $2, 2, 2, 4, x, 5, 10$ ，中位数为 4，众数为 2，平均值为 $\frac{25+x}{7} > \frac{25+4}{7} > 4$ ，所以这 3 个数从小到大排序是： $2, 4, \frac{25+x}{7}$ 。因为成等差数列，则 $2 + \frac{25+x}{7} = 8$ ，解得， $x = 17$ 。

综上， x 的所有可能值之和是 $3+17=20$ ，选 E。

Problem 24

考点：代数（函数及韦达定理）

解答： $x = 9z$ 代入 $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$ 得到， $f(3z) = 81z^2 + 9z + 1 = 7$ ，即
 $81z^2 + 9z - 6 = 0$ ，那么方程的所有根之和为 $\frac{-9}{81} = -\frac{1}{9}$ ，选 B。

Problem 25

考点：数论（余数）

解答：首先我们判断年份为 N 的这一年是 366 天还是 365 天，假设是 x 天，则从第 N 年的第 300 天到第 $N+1$ 年的第 200 天，共经过 $x-300+200=x-100$ 天，因此 $2+x-100 \equiv 2(\text{mod } 7)$ ，解得， $x \equiv 2(\text{mod } 7)$ ，因此 $x=366$ ，第 N 年是个闰年，那么第 $N-1$ 年就是个平年，共 365 天。从第 $N-1$ 年的第 100 天（假设是星期 m ），到第 N 年的第 300 天，共经过 $365-100+300=565$ 天，因此 $m+565 \equiv 2(\text{mod } 7)$ ，解得， $m \equiv 4(\text{mod } 7)$ ，选 A。