

2001 AMC10 解答

Problem 1

考点：数据分析(中位数和平均数)

解答：这列数一共 9 个数，已经按照从小到大的顺序排列，因此第 5 个数即为中

位数，即 $n+6=10, n=4$ 。下面求平均值。因为

$$n + n + 3 + n + 4 + n + 5 + n + 6 + n + 8 + n + 10 + n + 12 + n + 15 = 9n + 63$$

，所以，这列数的平均值为 $\frac{9n + 63}{9} = n + 7 = 11$ ，选 E。

Problem 2

考点：代数(解方程)

解答：

方程为： $x = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-x) + 2 = -1 + 2 = 1$. 因此, (C) $0 < x \leq 2$

Problem 3

考点：算术

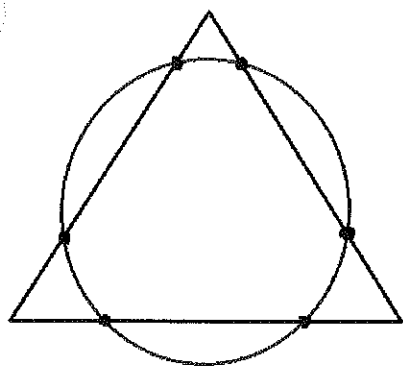
解答：假设原来的 2 个数分别是 a 和 b ，则 $a + b = S$ 。那么最终得到的 2 个数之

和是 $2(a + 3) + 2(b + 3) = 2(a + b) + 12 = 2S + 12$ ，选 (E)。

Problem 4

考点：平面几何

解答：

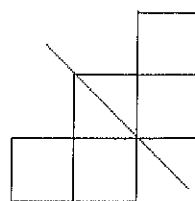
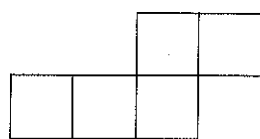
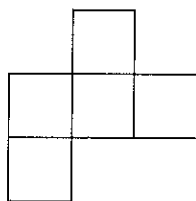
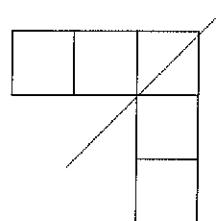
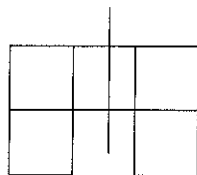
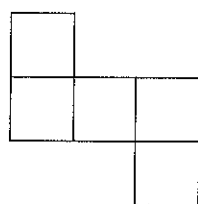
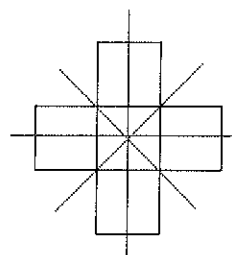
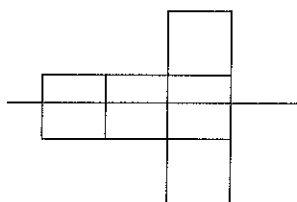
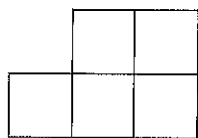
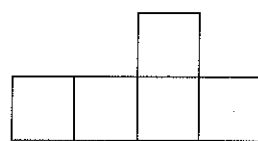
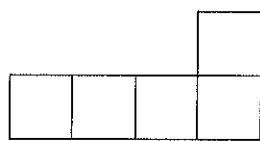
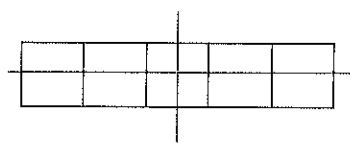


如上图所示，一个圆和一个三角形最多有 6 个交点。

Problem 5

考点：平面几何

解答：



如上图所示,凡是至少有一条对称轴的图形,都画出了它们的对称轴。因此共有

(D) 6 个这样的图形。

Problem 6

考点: 数论 (不定方程)

解答: 假设 $N = 10a + b$, 其中 a 和 b 均为 $0 \sim 9$ 的数字且 $a \neq 0$. 因此,

$10a + b = ab + a + b$, 化简, $b = 9$, 选 E。

Problem 7

考点: 代数 (列方程解应用题)

解答: 设原来的数为 x , 将小数点向右移动 4 位相当于乘以 10000, 因此得到方

程 $10000x = 4 \cdot \frac{1}{x}$, 等价于 $x^2 = \frac{4}{10000}$, 解得 $x = \frac{2}{100} = \textbf{(C) } 0.02$

Problem 8

考点: 数论 (最小公倍数)

解答: 因为 $\text{LCM}(3, 4, 6, 7) = 84$, 所以济宁过 84 天后, 他们又一起在实验室工作,

选 B。

Problem 9

考点: 代数 (列方程解应用题)

解答: 令总收入为 A 美元, 我们有方程:

$$\frac{A(p + .25)}{100} = \frac{28000p}{100} + \frac{(p + 2)(A - 28000)}{100}.$$

化简, $(p + .25)A = 28000p + Ap + 2A - 28000p - 56000$

$.25A = 2A - 56000$, 解得, $A = 32000$, 所以答案为 **(B) \$32000**.

Problem 10

考点: 代数 (解方程)

解答: 3 个方程相乘, 得到, $(xyz)^2 = 24 \times 48 \times 72 = 24 \times 24 \times 2 \times 2 \times 36$, 所以 $xyz = 24 \times 2 \times 6$, 因为 $xy = 24$, 则 $z = 12$; 因为 $xz = 48$, 则 $y = 6$; 因为 $yz = 72$, 所以 $x = 4$. 则 $x + y + z = 4 + 6 + 12 = 22$, 选 D.

Problem 11

考点: 数列

解答: 第一个环的边长为 3, 第二个环的边长为 5, 第三个环的边长为 7, ..., 所以环的边长为等差数列, 那么第 n 个环的边长是 $3 + (n-1) \times 2 = 2n+1$, 那么环中单位正方形的个数为 $4(2n+1) - 4 = 8n$. 第 100 个环中单位正方形的个数是 800 个, 选 C.

Problem 12

考点: 数论 (整除, 质数)

解答: 因为这 3 个连续整数必定有一个为偶数, 因此 n 能被 2 整除; 另外, 3 个连续整数的乘积必定能被 3 整除. 又因为已知 7 也能整除 n , 所以 n 必定能被 $7 \times 3 \times 2 = 42$ 整除. 所以 42 必定是 n 的一个因子. 因为 21, 14 和 6 均能整除 42, 从而 21, 14, 6 也必定是 n 的一个因子. 因此排除 A, B, C 和 E, 选择 D.

Problem 13

考点: 逻辑推理

解答：GH IJ的后四位要么是9753或7531，那么留下的另一个奇数1或9必定是A, B, C其中之一。因为 $A + B + C = 9$ ，所以留下的那个奇数必定是1.因此ABC中的另外2个偶数之和为8. 因为DEF只能是864, 642, 或420，留下的另外2个偶数分别是2和0, 8和0以及6和8，作为ABC中的另外2个偶数。因为只有8和0之和为8，因此ABC为810，那么A即为(E) 8。

Problem 14

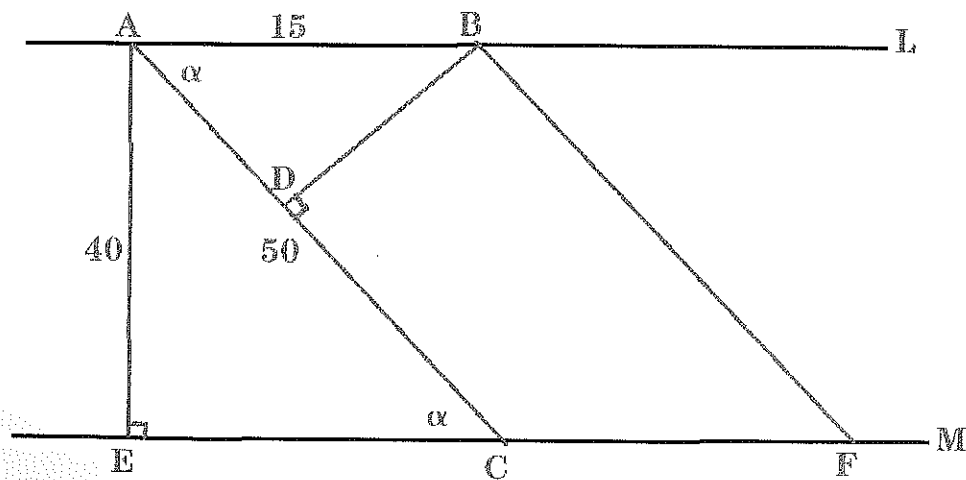
考点：数论（不定方程）

解答：假设全价票一张 x 美元，共有 y 张全价票，那么 $xy + \frac{x}{2}(140 - y) = 2001$ ，化简， $x(y + 140) = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$ ，因为 $0 \leq y \leq 140$ ，所以 $140 \leq y + 140 \leq 280$ ，那么 $x(y + 140) = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29 = 23 \cdot 174$ ，即 $x = 23, y = 34$ ，那么全价票总共筹到的钱是 $xy = 23 \cdot 34 = 782$ ，选A.

Problem 15

考点：平面几何

解答：



如上图所示, L 和 M 为平行的路缘, AC 和 BF 为两条平行的条纹, 则 $AB=15$ 为两条条纹之间路缘的长度, $AE=40$ 为路缘间的距离, $AC=50$ 为条纹长度. 在直角 $\triangle ACE$ 中, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 那么在 $\triangle ABD$ 中, $BD = AB \cdot \sin \alpha = 15 \times \frac{4}{5} = 12$, 选 C.

Problem 16

考点: 数据分析 (平均数, 中位数)

解答: 假设这 3 个数是 $a \leq b \leq c$, 则
$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} - a = 10 \\ c - \frac{a+b+c}{3} = 15 \\ b = 5 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \\ c = 25 \end{cases}, \text{ 三个数}$$

之和为 30, 选 D。

Problem 17

考点: 立体几何

解答: 252° 换算成弧度是 $\frac{7\pi}{5}$ 。所形成的圆锥体的底面圆的周长等于扇形的弧长, 即 $2\pi r = \frac{7\pi}{5} \times 10$, 解得, $r=7$, 所以半径为 7. 圆锥体的斜高即为原来扇形的半径 10。因此选 C。

Problem 18

考点: 平面几何

解答: 假设小正方形的边长为 1, 则整个平面 (大正方形) 的边长为 9, 面积为 81. 整个平面内可以数到共有 $6+12+12+6=36$ 个小正方形, 因此小正方形覆盖的面积为 36, 那么五边形覆盖的面积是 $81-36=45$, 占了总面积的 $\frac{45}{81} \approx 55.6\%$, 选 D。

Problem 19

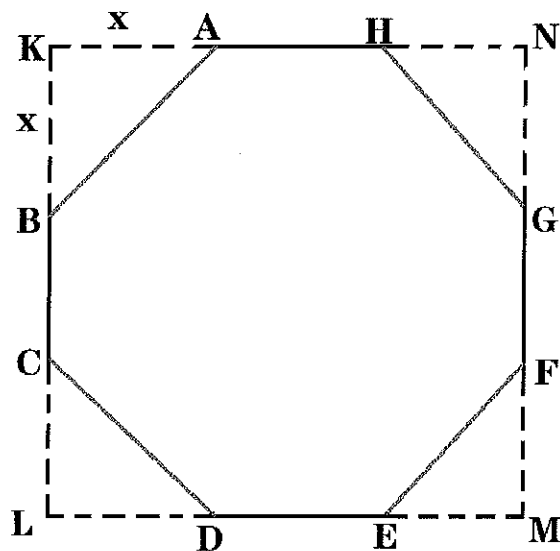
考点：排列组合（球和罐子模型）

解答：如果把选择的 4 个甜甜圈看成球，三种甜甜圈看成三个罐子，则这个问题可以等价于：有 4 个一模一样的球，放入 3 个罐子中，罐子可以为空的方法数（罐子为空对应某种甜甜圈不选）。共有 $C_{4+3-1}^{3-1} = C_6^2 = 15$ 种，选 D。

Problem 20

考点：平面几何

解答：



设 $AK = BK = x$ ，则 $AB = \sqrt{2}x$ ，所以 $AH = \sqrt{2}x$ ， $HN = x$ 。因此

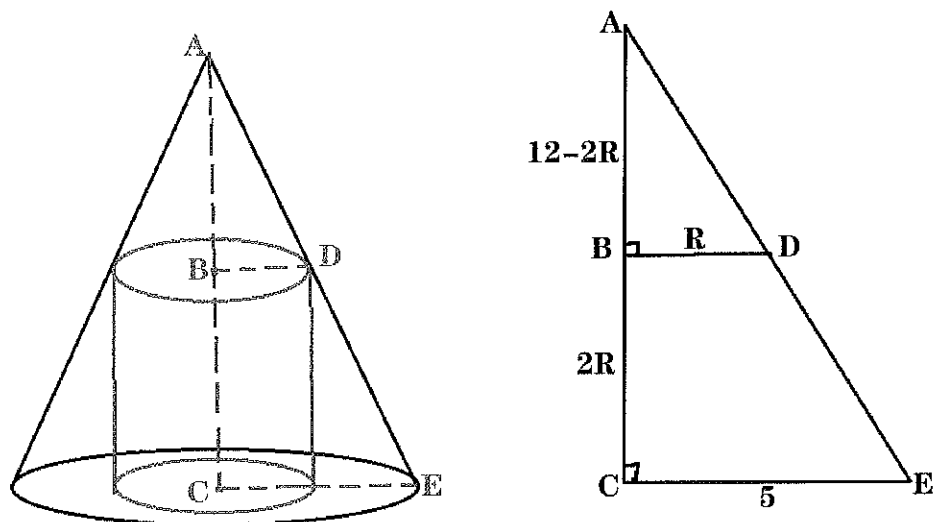
$KN = KA + AH + HN = x + \sqrt{2}x + x = 2000$ ，解得， $x = \frac{2000}{2 + \sqrt{2}} = 1000(2 - \sqrt{2})$ ，那

么正八边形的边长为 $\sqrt{2}x = 1000(2 - \sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 2000\sqrt{2} - 2000$ ，选 B。

Problem 21

考点: 立体几何

解答:



如上图所示, 取切面 $\triangle ACE$ 。设圆柱体的半径是 R , 则 $BD=R, BC=2R$, 由于圆锥体的高 $AC=12$, 所以 $AB=12-2R$ 。由 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$, 得, $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$, 即 $\frac{12-2R}{12} = \frac{R}{5}$, 解得, $R = \frac{30}{11}$, 选 B.

Problem 22

考点: 算术

解答: 因为 $v+18+25=v+x+21=v+24+w$, 因此 $x=22, w=19$ 。所以这个共同的和为 $25+x+w=25+22+19=66$, 那么 $25+21+z=18+x+y=66$, 解得, $z=20, y=26, x+y=46$, 选 D.

Problem 23

考点: 概率

解答:

方法 1: 避免分类讨论

要求最后一次取出白色, 则在取出最后一个白色时, 红色还没取完。若把这 5 个筹码排成一排, 则 2 个白色必须排在前 4 个位置中的两个位置。因此概率为

$$P = \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ 选 D.}$$

方法二: 分类讨论

最后一次取出白色筹码时, 表明红色还没有全部取完。我们对最后一次是第几次进行分类讨论。

①最后一次是第二次。表明前 2 次均取出白色, 概率为 $P_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ 。

②最后一次是第三次。表明前 2 次必有一次是取出红色。若把 5 个筹码排成一排, 从左向右依次取出。则前 2 个位置必有一个红色, 第 1 和第 3 个位置均为白色, 第 4 和第 5 个位置均为红色, 符合要求的排列方法有 $C_2^1 = 2$ 种。将 5 个筹码排成一排, 是个带重复的排列, 共 $\frac{5!}{2!3!} = 10$ 种方法, 因此概率为 $P_2 = \frac{2}{10}$ 。

③最后一次是第四次。表明前 3 次有 1 次为白色, 2 次为红色, 第 4 和第 5 个位置分别为白色和红色, 符合要求的排列数是 $C_3^2 = 3$, 因此概率为 $P_3 = \frac{3}{10}$ 。

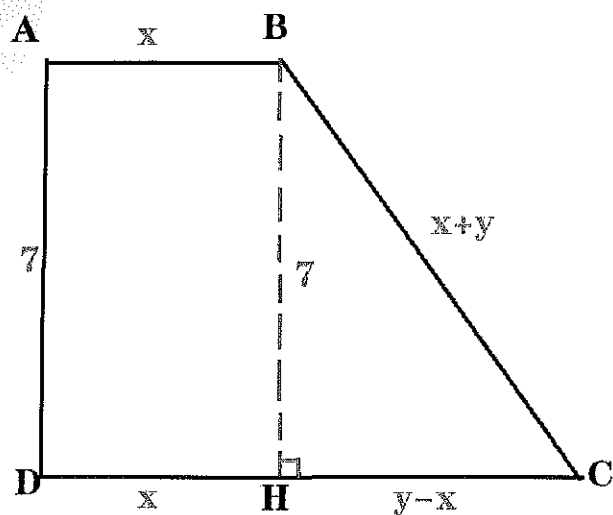
④最后一次是第五次, 则前 4 次必有 3 次是红色, 不符合要求。

综上, 概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, 选 D.

Problem 24

考点: 平面几何

解答:

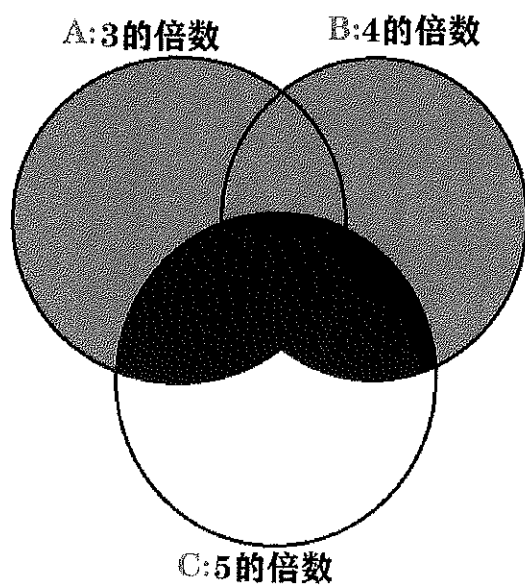


过 B 作 $BH \perp CD$ 于 H。设 $AB = x, CD = y$, 那么 $CH = y - x, BH = 7, BC = x + y$ 。在直角 $\triangle BCH$ 中, 由勾股定理, $7^2 + (y - x)^2 = (y + x)^2$, 化简得, $49 - 2xy = 2xy$, 所以 $AB \cdot CD = xy = \frac{49}{4} = 12.25$, 选 B。

Problem 25

考点: 数论 (倍数的个数)

解答:



如上集合 A, B 和 C 分别代表 3 的倍数, 4 的倍数和 5 的倍数。我们要求的是灰色部分的元素个数, 可以看成 $A \cup B$ 减去图中黑色部分。而黑色部分可这样计算:

$$A \cap C + B \cap C - A \cap B \cap C.$$

$$A \cup B = A + B - A \cap B = \left\lfloor \frac{2001}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2001}{12} \right\rfloor = 667 + 500 - 166 = 1001;$$

$$A \cap C + B \cap C - A \cap B \cap C = \left\lfloor \frac{2001}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2001}{60} \right\rfloor = 133 + 100 - 33 = 200。$$

所以, 灰色部分元素个数为 $1001 - 200 = 801$. 选 B.