

2002 AMC10A 解答

Problem 1

考点：算术

解答：

对式子 $\frac{10^{2000} + 10^{2002}}{10^{2001} + 10^{2001}}$ 因式分解为 $\frac{10^{2000}(1 + 100)}{10^{2001}(1 + 1)} = \frac{101}{20}$. 因为 $\frac{101}{20} = 5.05$,

所以答案为 (D) 5.

Problem 2

考点：算术

解答：

$$(2, 12, 9) = \frac{2}{12} + \frac{12}{9} + \frac{9}{2} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

因此答

案为 (C) 6.

Problem 3

考点：代数（幂运算）

解答：为了方便，将 $2^{2^{2^2}}$ 写作 $2 \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow 2$ ，其中 $\uparrow$ 表示指数运算。我们有 5 种方法添加括号，如下

1. $2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow 2))$
2. $2 \uparrow ((2 \uparrow 2) \uparrow 2)$
3. $((2 \uparrow 2) \uparrow 2) \uparrow 2$
4. $(2 \uparrow (2 \uparrow 2)) \uparrow 2$

5. $(2 \uparrow 2) \uparrow (2 \uparrow 2)$

注意到, $2 \uparrow (2 \uparrow 2) = (2 \uparrow 2) \uparrow 2 = 16$ 。因此, 第 1 个和第 2 个相等, 第 3 个和第 4 个相等。第 1 个就是题目中描述的情况。因此我们只要求第 3 个和第 5 个的值:

$$((2 \uparrow 2) \uparrow 2) \uparrow 2 = 16 \uparrow 2 = 256$$

$$(2 \uparrow 2) \uparrow (2 \uparrow 2) = 4 \uparrow 4 = 256$$

因此其他的值只能是 256, 答案选 (B) 1。

Problem 4

考点: 数论 (不定方程)

解答: $mn - m - n \leq 0$, 运用 SFFT, $(m-1)(n-1) \leq 1$. 若 $n=1$, 则左边为 0 满足不等式, 而此时 m 有无穷多个值, 因此选 E.

Problem 5

考点: 平面几何

解答: 大圆的半径为 $1 + 1 + 1 = 3$, 因此面积为 9π . 每个小圆的面积是 π ; 因为有 7 个小圆, 所以它们的总面积是 7π . 所以阴影部分面积

是 $9\pi - 7\pi =$ $2\pi \Rightarrow (C)$.

Problem 6

考点: 算术

解答: 原来的数为 $43 \times 3 + 9 = 138$, 则遵循正确的步骤, 先减去 3 得 135, 再除以 9 得, 15. 因此选 A。

Problem 7

考点：平面几何

解答：令 r_1 和 r_2 分别为圆 A 和圆 B 的半径。我们知道，若一个扇形的半径为 r ，

圆心角为 θ ，那么扇形的弧长为 $\frac{\theta}{360} \cdot 2\pi r$ 。因此圆 A 的弧长为 $\frac{45}{360} \cdot 2\pi r_1 = \frac{r_1\pi}{4}$ ，

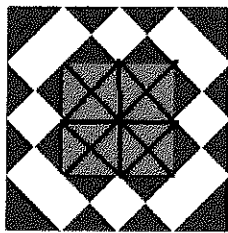
圆 B 的弧长为 $\frac{30}{360} \cdot 2\pi r_2 = \frac{r_2\pi}{6}$ 。因为它们相等，所以 $\frac{r_1\pi}{4} = \frac{r_2\pi}{6}$ ，化简得，

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ 。那么两个圆的面积比为半径比的平方，即 (A) 4/9。

Problem 8

考点：平面几何

解答：我们设一个小的蓝色三角形的面积为 S ，因为一共有 24 个小的蓝色三角形，因此 $B = 24S$ ；白色正方形共 12 个，而每个白色正方形由 2 个蓝色三角形组成，因此 $W = 12 \times 2S = 24S$ ；



如上图所示，红色正方形可以分成 16 个蓝色三角形，因此 $R = 16S$ 。所以可以得到， $B = W$ ， $2W = 3R$ ， $2B = 3R$ 。选 A。

Problem 9

考点：代数（代数变形）

解答：由 $1001C - 2002A = 4004$ 得到， $C = 2A + 4$ ；由

$1001B + 3003A = 5005$ 得， $B = 5 - 3A$ 。因此 $\frac{A+B+C}{3} = \frac{A+5-3A+2A+4}{3} = 3$ ，

选 B。

Problem 10

考点：代数（解方程）

解答：分解因式得 $(2x + 3) \cdot ((x - 4) + (x - 6)) = (2x + 3)(2x - 10) = 0$ ，

因此根为 $-\frac{3}{2}$ 和 5，那么答案为 $-\frac{3}{2} + 5 = \boxed{(A) 7/2}$ 。

Problem 11

考点：算术

解答：每个 0.8MB 的文件和 0.4MB 的文件搭配放在同一个磁盘上，磁盘的利用

效率最高，此时需要 3 个磁盘放 3 个 0.8MB 和 3 个 0.4MB 的文件。还剩余 12

个 0.7MB 的文件和 12 个 0.4MB 的文件。应该把 2 个 0.7MB 的文件放一个磁盘

上，3 个 0.4MB 的文件防在一个磁盘上，磁盘的利用率最高，所以还需要

$12/2 + 12/3 = 10$ 个磁盘。因此最少共需要 13 个磁盘，选 B。

Problem 12

考点：代数（列方程解应用题）

解答：设 Earl E. Bird 先生准备上班需要花 x 分钟，那么 $40 \cdot \frac{x+3}{60} = 60 \cdot \frac{x-3}{60}$ ，解得， $x = 15$ 分钟 $= \frac{1}{4}$ 小时。则他家到公司的距离为 $40 \cdot \frac{x+3}{60} = 12$ 英里。那么要保证准时上班，他的速度是 $\frac{12}{\frac{1}{4}} = 48$ 英里每小时，选 B。

Problem 13

考点：平面几何（勾股定理）

解答：因为 $15^2 + 20^2 = 25^2$ ，因此这是个直角三角形。斜边上的高为 $h = \frac{15 \times 20}{25} = 12$ ，而其他两条高为 15 和 20，所以最短的高是 12，选 B。

Problem 14

考点：韦达定理

解答：假设这 2 个质数根为 r_1 和 r_2 ，由韦达定理， $r_1 + r_2 = 63$ 。两个质数和为一个奇数，则这两个质数必有 1 个为 2，则另外一个为 61，那么 $k = r_1 r_2 = 122$ 只有一个值，选 B。

Problem 15

考点：数论（质数）

解答：数字 2, 4, 6 绝不可能出现在个位上，否则是两位偶数，不是质数。形成的 3 个质数一种可能是：23, 41, 67。剩下的两个数字 5 和 9 则组成质数 59。这 4 个质数的和是 $23 + 41 + 67 + 59 = 190$ 。注意，实际上这 4 个两位质数不止一种可能性，但它们的和是不变的。例如另一种可能是：29, 47, 61, 53。和仍然为 190。选 E。

Problem 16

考点：代数（代数变形）

解答：令 $a+1=b+2=c+3=d+4=a+b+c+d+5=k$ ，所以

$a=k-1, b=k-2, c=k-3, d=k-4$ ，代入 $a+b+c+d+5=k$ 中，得到

$4k-10+5=k$ ，解得， $k=\frac{5}{3}$ 。因此 $a+b+c+d=k-5=-\frac{10}{3}$ ，选 B。

Problem 17

考点：代数（比例）

解答：当将第 1 个杯中一半的液体倒入第二个杯中时，第二个杯中总共有 6 盎司液体，其中 4 盎司是奶油。因此奶油占了 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 。接着从第二个杯中取出 3 盎司液体，其中奶油有 $3 \times \frac{2}{3}=2$ 盎司，然后倒入第一个杯中，此时第一个杯中总液体为 $2+3=5$ 盎司，其中奶油 2 盎司，则奶油的占比为 $\frac{2}{5}$ ，选 D。

Problem 18

考点：立体几何

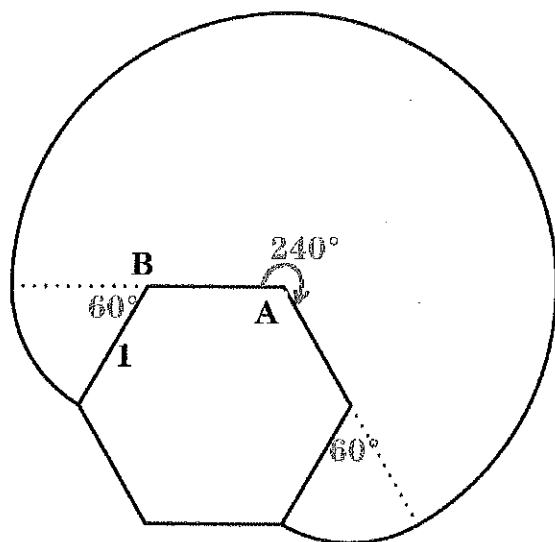
解答：这些骰子中，有的只有一个面可见，这些骰子位于每个面的中心，所以共有 6 个这样的骰子，而每个骰子可见的面上数字最小为 1，因此总和为 6；有的是两个面可见，这样的骰子在大正方体的每条棱上有 1 个，因为共有 12 条棱，所以有 12 个这样的骰子，而每个骰子上两个可见的面上数字最小为 1 和 2，和为 3，因此这 12 个骰子可见面上数字总和为 $3 \times 12=36$ ；还有的骰子有 3 个面可见，这样的骰子位于大正方体的每个顶点上，共 8 个，而每个骰子上可见的三个面最小为 1, 2, 3，和为 6，因此这 8 个骰子可见面的总和为 48。

综上，可见的所有面之和的最小值为 $6+36+48=90$ ，选 D。

Problem 19

考点：平面几何

解答：



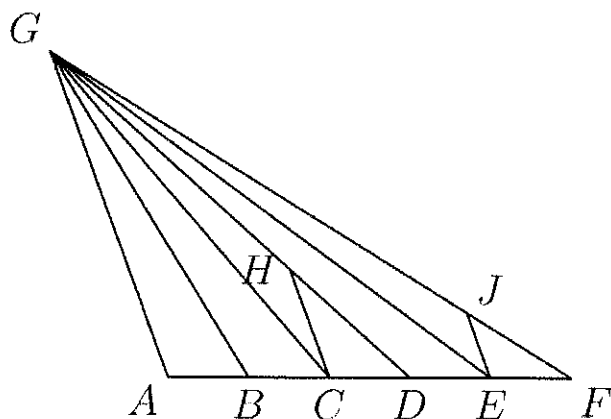
如上图，Spot 可以到达的狗窝外区域由两个圆心角为 60° ，半径为 1 的扇形和一个圆心角为 240° ，半径为 2 的扇形组成。它们的面积之和为

$$S = 2 \times \frac{1}{6} \pi \times 1^2 + \frac{2}{3} \times \pi \times 2^2 = \frac{1}{3} \pi + \frac{8}{3} \pi = 3\pi, \text{ 选 E.}$$

Problem 20

考点：平面几何(相似三角形)

解答：



因为 $HC \parallel AG$, 所以 $\frac{HC}{AG} = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{3}$ 。因为 $JE \parallel AG$, 所以 $\frac{JE}{AG} = \frac{FE}{FA} = \frac{1}{5}$ 。两式相除,
 $\frac{HC}{JE} = \frac{5}{3}$, 选 D。

Problem 21

考点: 数据分析

解答: 假设这 8 个整数从小到大排序为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7, a_8$, 设最大的数 $a_8 = x$, 那么最小的数 $a_1 = x - 8$ 。因为中位数 8 是 a_4 和 a_5 的平均值, 且 8 是唯一的众数, 说明其中至少 2 项是 8, 则 $a_4 = a_5 = 8$ 。由于平均数为 8, 则

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 64$, 即 $x - 8 + a_2 + a_3 + 8 + 8 + a_6 + a_7 + x = 64$, 则

$a_2 + a_3 + a_6 + a_7 = 56 - 2x$, 而 a_2, a_3, a_6, a_7 的最小值分别是 $x - 8, x - 8, 8, 8$, 最大值为

$8, 8, x, x$, 两种情况下仍然满足唯一的众数为 8。因此

$x - 8 + x - 8 + 8 + 8 \leq 56 - 2x \leq 8 + 8 + x + x$, 解得, $10 \leq x \leq 14$, 所以最大的整数取

14。当最大整数取 14 时, 这 8 个数为: 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 14。符合题意。选 D。

Problem 22

考点: 数列 (找规律) + 数列 (完全平方数)

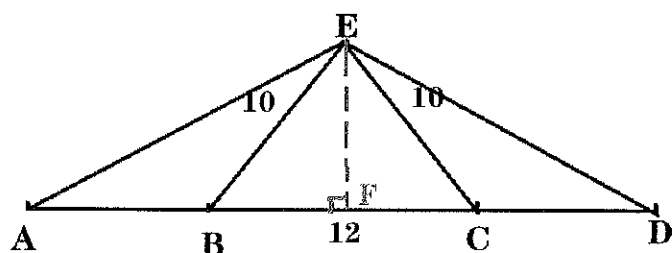
解答: 我们先列出操作前几次的结果, 看是否有规律。最初, 有 10 块瓷砖编号为平方数 ($1^2, 2^2, 3^2, \dots, 10^2$), 第 1 次操作后, 还剩 $100 - 10 = 90$ 块; 1~90 中平方数有 9 个, 第 2 次操作移除 9 块瓷砖剩余 81 块; 1~81 中平方数有 9 个, 第 3 次操作再次移除 9 块剩余 72 块; 1~72 平方数有 8 个, 第 4 次操作移除 8 块剩余 64 块; 1~64 中平方数有 8 个, 再次移除 8 块剩余 56 块, ...我们发现, 从第 1 次之后, 移除的块数分别是 9, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, ...即, 移除的块数重复 1 次, 并依次减 1。当连续 2 次操作移除的块数都是 2 时, 此时总共移走 $10 + 2(9 + 8 + 7 + \dots + 2) = 98$ 块,

还剩2块,此时已经操作了 $1+2\times 8=17$ 次。接着再操作1次,移走编号为1的瓷砖,只剩1块。因此共需要操作18次,选C。

Problem 23

考点:平面几何

解答:



过E作EF垂直AD于F.因为 $\triangle BEC$ 是个等腰三角形,所以 $BF=FC$,又

$AB=CD$,所以 $AF=DF$,所以EF为AD的中垂线,设 $AE=ED=x$,

$AB=CD=y$ 。在直角 $\triangle BEF$ 中, $BE=10$, $BF=6$,所以 $EF=8$ 。在直角 $\triangle AEF$ 中,

由勾股定理, $x^2=(y+6)^2+64$ 。因为 $\triangle AED$ 的周长是 $\triangle BEC$ 周长的2倍,即

$2x+2y+12=2(10+10+12)$,化简得, $x+y=26$ 。解上述2个方程,解得, $y=9$,

选D。

Problem 24

考点:概率(分类讨论)

解答:我们根据Tina所选的2个数之和分类讨论:

①若Tina所选的2个数和为3,概率为 $\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{10}$,同时Sergio所选的数大于3的

概率为 $\frac{7}{10}$,那么这种情况的总概率为 $\frac{1}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{100}$ 。

②若 Tina 所选的 2 个数和为 4, 概率为 $\frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, 同时 Sergio 所选的数大于 4 的

概率为 $\frac{6}{10}$, 那么这种情况的总概率为 $\frac{1}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{6}{100}$ 。

③若 Tina 所选的 2 个数和为 5, 概率为 $\frac{2}{C_5^2} = \frac{2}{10}$, 同时 Sergio 所选的数大于 5 的

概率为 $\frac{5}{10}$, 那么这种情况的总概率为 $\frac{2}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{10}{100}$ 。

④若 Tina 所选的 2 个数和为 6, 概率为 $\frac{2}{C_5^2} = \frac{2}{10}$, 同时 Sergio 所选的数大于 6 的

概率为 $\frac{4}{10}$, 那么这种情况的总概率为 $\frac{2}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{100}$ 。

⑤若 Tina 所选的 2 个数和为 7, 概率为 $\frac{2}{C_5^2} = \frac{2}{10}$, 同时 Sergio 所选的数大于 7 的

概率为 $\frac{3}{10}$, 那么这种情况的总概率为 $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$ 。

⑥若 Tina 所选的 2 个数和为 8, 概率为 $\frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, 同时 Sergio 所选的数大于 8 的

概率为 $\frac{2}{10}$, 那么这种情况的总概率为 $\frac{1}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{2}{100}$ 。

⑦若 Tina 所选的 2 个数和为 9, 概率为 $\frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, 同时 Sergio 所选的数大于 9 的

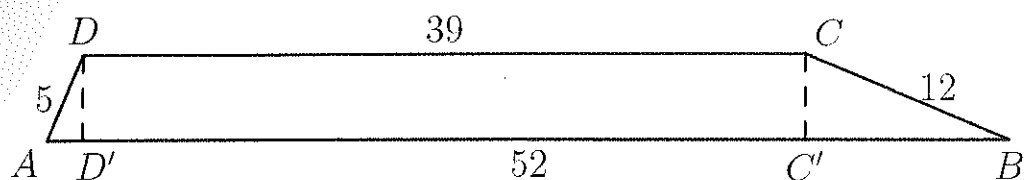
概率为 $\frac{1}{10}$, 那么这种情况的总概率为 $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ 。

综上, 总的概率为上述所有概率之和: $P = \frac{7+6+10+8+6+2+1}{100} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. 选 A。

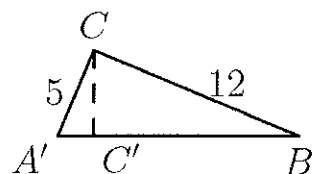
Problem 25

考点: 平面几何

解答: 分别过 D 和 C 作底边 AB 上的高 DD' 和 CC', 如下图所示:



将 $\triangle ADD'$ 向右平移,使得 DD' 与 CC' 重合。我们得到如下三角形:



$A'B$ 的长度等于 AB 的长度减去 CD 的长度。因此 $A'B = 52 - 39 = 13$ 。

那么 $A'BC$ 是个 $(5, 12, 13)$ 的直角三角形,面积为

$$[A'BC] = \frac{A'C \cdot BC}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30, \text{ 那么它的高 } CC' \text{ 为 } \frac{2[A'BC]}{A'B} = \frac{60}{13}.$$

最后,梯形 $ABCD$ 的面积为:

$$\frac{(AB + CD) \cdot CC'}{2} = \frac{91 \cdot 60}{13 \cdot 2} = 7 \cdot 30 = \boxed{(C) 210}$$