

2002 AMC10B 解答

Problem 1

考点：算术

解答： $\frac{2^{2001} \cdot 3^{2003}}{6^{2002}} = \frac{6^{2001} \cdot 3^2}{6^{2002}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ，选择 (E)

Problem 2

考点：算术

解答： $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2 + 4 + 6} = \frac{48}{12} = 4 \Rightarrow (C)$ 。

Problem 3

考点：算术

解答：

我们希望求得 $\frac{9 + 99 + \cdots + 999999999}{9}$ ，或者

$$\frac{9(1 + 11 + 111 + \cdots + 111111111)}{9} = 123456789$$

这便是 M 的值，其中不

含数字 0，所以答案为 (A) 0。

Problem 4

考点：算术

解答：由乘法的分配率，

$$(3x - 2)[(4x + 1) - 4x] + 1 = 3x - 2 + 1 = 3x - 1 = 3(4) - 1 = \boxed{(D) 11}$$

Problem 5

考点：平面几何

解答：由图得，大圆的直径为 $D=3+3+2+2=10$ ，则半径为 $R=5$ 。那么阴影部分面积是 $S=\pi \times 5^2 - \pi \times 3^2 - \pi \times 2^2 = 12\pi$ ，选 E。

Problem 6

考点：数论（质数）

解答： $n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$ 是个质数，则 $n-1=1$ 或 $n-2=1$ ，那么 $n=2$ 或 3。

分别代入 $n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$ ，得到这个数是 0（非质数）和 2（是质数）。

因此只有当 $n=3$ 时满足要求，选 B。

Problem 7

考点：数论（整除）

解答： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{n} = \frac{41n+42}{42n} = \frac{42n-n+42}{42n} = 1 + \frac{42-n}{42n}$ ，要使得这是个整数，则

$42-n=42nk$ ，所以 $n = \frac{42}{42k+1}$ ，因此 $42k+1$ 必须是 42 的一个正因子，

$42k+1=1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$ ，只有当 $42k+1=1$ 时， $k=0$ 是个整数，此时

$n = \frac{42}{42k+1} = 42$ ，选 E。

Problem 8

考点：数论（余数）

解答：因为 7 月有 5 个周一，那么周一出现的日期只能是 (1, 8, 15, 22, 29) 或

(2, 9, 16, 23, 30) 或 (3, 10, 17, 24, 31)。

对于第 1 种情况, 8 月的第一天是周四, 那么 8 月出现 5 次的有周四, 周五和周六。

对于第 2 种情况, 8 月的第一天是周三, 那么 8 月出现 5 次的有周三, 周四和周五。

对于第 3 种情况, 8 月的第一天是周二, 那么 8 月出现 5 次的有周二, 周三和周四。

这 3 种情况, 唯有周四都出现 5 次, 因此周四必定出现 5 次, 选 D。

Problem 9

考点: 排列组合

解答:

方法一: 考虑正面

其中以 A, M, O, S 开头的单词都在 USAMO 的前面。而这些单词的总个数计算如下: 第 1 个字母从 A, M, O, S 中选一个, 4 种方法。后面 4 个位置是剩余 4 个字母的全排列, 有 $4!$ 种方法。因此以 A, M, O, S 开头的单词共有 $4 \times 4! = 96$ 个。类似的, 第一个字母为 U, 第二个字母为 A 或 M 或 O 的单词共有 $3 \times 3! = 18$ 个。这些都排完后, 接下来的第一个单词便是 USAMO。因此 USAMO 前面一共有 $96 + 18 = 114$ 个单词, 那么 USAMO 占据第 115 个位置, 选 D。

方法二: 考虑反面

使用字母 A, M, O, S 和 U, 共可以形成 $5! = 120$ 个单词。这其中, 前两个字母是 U 和 S, 第 3 个字母为 M 或 O 的单词均在 USAMO 之后, 这样的单词共有 $2 \times 2! = 4$ 个。另外, 以 U, S, A 开头的且在 USAMO 之后的单词只有 USAOM 这 1

个。因此位于 USAMO 之后的单词有 5 个。那么 USAMO 占据第 $120-5=115$ 个位置, 选 D。

Problem 10

考点: 代数 (二次方程, 韦达定理)

解答: 因为方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的根为 a 和 b , 那么根据韦达定理, $\begin{cases} a+b=-a \\ ab=b \end{cases}$,

解得, $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$ 而 a 和 b 均为非零实数, 则 $(a,b)=(1,-2)$, 选 C。

Problem 11

考点: 代数 (解方程)

解答: 令这 3 个连续的正整数为 $a-1, a$ 和 $a+1$ 。这 3 个数之和为 $3a$, 和的 8 倍为 $24a$ 。因此有 $a(a-1)(a+1) = 24a \Rightarrow (a-1)(a+1) = 24$, 解得 $a=5$ 。
所以这 3 个连续正整数的平方和为 $4^2 + 5^2 + 6^2 = \boxed{(B) 77}$ 。

Problem 12

考点: 代数 (解方程)

解答: 交叉相乘, $(x-1)(x-6) = (x-2)(x-k)$, 化简, $x^2 - 7x + 6 = x^2 - (k+2)x + 2k$,
即 $(k-5)x + 6 - 2k = 0$ 。若 $k=5$, 则方程变为 $6 - 2 \times 5 = 0$ 产生矛盾, 因此方程无解。
若 $k \neq 5$, 则 $x = \frac{2k-6}{k-5}$, 因为原方程无解, 所以 $x = \frac{2k-6}{k-5} = 2$ 或 6 , 解得, $k=6$ 。
综上, 当 $k=5$ 或 6 时, 方程无解, 因此选 E。

Problem 13

考点: 代数 (一元一次方程)

解答：原方程化为： $(8x-12)y+(2x-3)=0$ ，因为对所有 y 值均成立，因此

$8x-12=0$ 且 $2x-3=0$ ，解得， $x=\frac{3}{2}$ 。选 D。

Problem 14

考点：幂运算

解答： $N = \sqrt{25^{64} \cdot 64^{25}} = 5^{64} \cdot 8^{25}$ 。因

此， $N = 5^{64} \cdot 8^{25} = 5^{64} \cdot (2^3)^{25} = 5^{64} \cdot 2^{75}$ 。将所有 2 和 5 结合起来，我们得到， $(2 \cdot 5)^{64} \cdot 2^{(75-64)} = (2 \cdot 5)^{64} \cdot 2^{11} = 10^{64} \cdot 2^{11}$ ，这个结果就是 2048 后面接 64 个 0。因此所有位上数字和为 $2+4+8=14$ ，选 B。

Problem 15

考点：数论(质数)

解答：注意到 2 是唯一的偶质数。若 A 和 B 均不为 2，即均为奇质数，则 $A+B$ 必为大于 2 的偶数，这与 $A+B$ 为质数矛盾。因此 A 和 B 其中之一必为 2（若两个都为 2，则 $A+B=4$ 不为质数）。因为 $A-B>0$ ，则 $A>B$ ，那么 $B=2$ 。接着令 $A=3, 5, 7, 11, \dots$ 依次尝试，发现 $A=5$ 时，5, 2, 3, 7 均为质数满足题意，因此这 4 个质数之和为 $5+2+3+7=17$ 也是个质数，选 E。

Problem 16

考点：数论

解答：

令 $x^2 = \frac{n}{20-n}$ ，且 $x \geq 0$ （注意到，对于 $x < 0$ 的情况，不会有额外的满足要求的 n ），得到， $n = \frac{20x^2}{x^2+1}$ 。因为 $\gcd(x^2, x^2+1) = 1$ ，因此， x^2+1 必定整除 20。

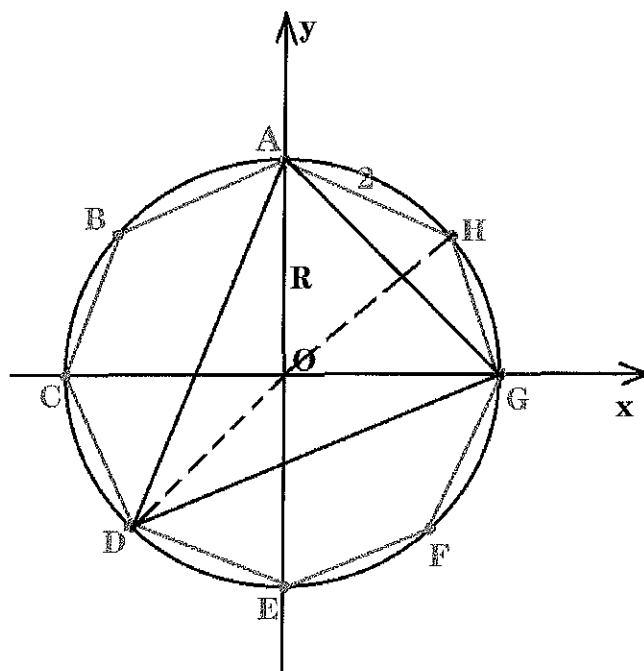
列出20的所有正因子 1,2,4,5,10,20,且令 $x^2+1=1,2,4,5,10,20$, 我们得到非负整数

$x=0,1,2,3$ 是仅有的 (D) 4 个解, 分别对应 $n=0,10,16,18$ 。

Problem 17

考点: 平面几何

解答:



我们可以以这种方式画出正八边形: 先画出以原点为圆心的圆, 再取圆周的八等分点, 连接形成正八边形 ABCDEFGH。下面先求圆的半径 R 。在 $\triangle AOH$ 中, 由

余弦定理, $R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 45^\circ = 4$, 解得, $R^2 = \frac{4}{2 - \sqrt{2}} = 2(2 + \sqrt{2})$, 那么

$$\begin{aligned} S_{\triangle ADG} &= S_{\triangle AOD} + S_{\triangle GOD} + S_{\triangle AOG} = \frac{1}{2} R^2 \sin 135^\circ + \frac{1}{2} R^2 \sin 135^\circ + \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2(2 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 3\sqrt{2} + 4 \end{aligned}$$

选 C.

Problem 18

考点：排列组合

关键思路解析：当圆两两相交时，交点最多。所以每两个圆成一对，一共可以成

$C_4^2 = 6$ 对。而因为每 2 个圆相交，能产生 2 个交点，所以总共 $6 \times 2 = 12$ 个交点。

解答：12 个交点，选 D。

Problem 19

考点：代数（等差数列）

解答：设等差数列的公差为 d ，则 $a_2 - a_1 = d$ 。将两个方程相减，

$$(a_{101} - a_1) + (a_{102} - a_2) + (a_{103} - a_3) + \dots + (a_{200} - a_{100}) = 200 - 100 = 100, \text{ 即}$$

$$100d + 100d + 100d + \dots + 100d = 100, \text{ 所以 } 100d \times 100 = 100, \text{ 解得, } d = 0.01, \text{ 选}$$

C.

Problem 20

考点：代数（代数变换或特殊值方法）

解答：

方法一：特殊值法

$$\text{令 } c=1, \text{ 分别代入两个方程, 得到 } \begin{cases} a-7b=-4 \\ 8a+4b=8 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a-7b=-4 \\ 2a+b=2 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{2}{3} \end{cases}. \text{ 因}$$

$$\text{此 } a^2 - b^2 + c^2 = 0 + 1 = 1, \text{ 选 B.}$$

方法二：代数变换（更一般的方法）

原方程化为： $a + 8c = 7b + 4$ 以及 $8a - c = 7 - 4b$ 。分别两边平方得，

$$a^2 + 16ac + 64c^2 = 49b^2 + 56b + 16 \text{ 以及}$$

$$64a^2 - 16ac + c^2 = 16b^2 - 56b + 49。$$

将这 2 个方程相加后并除以 65, 得到,

$$a^2 + c^2 = b^2 + 1, \text{ 所以 } a^2 - b^2 + c^2 = \boxed{(B)1}.$$

Problem 21

考点: 算术

解答: 假设 Andy 的草坪面积是 $6x$, 则 Beth 的草坪面积是 $3x$, Carlos 的草坪面积是 $2x$ 。假设 Carlos 的割草机的割草速度是 y , 那么 Beth 的割草机的割草速度是 $2y$, Andy 的割草机的割草速度是 $3y$ 。因此 Andy 割完草所需时间为: $\frac{6x}{3y} = \frac{2x}{y}$,

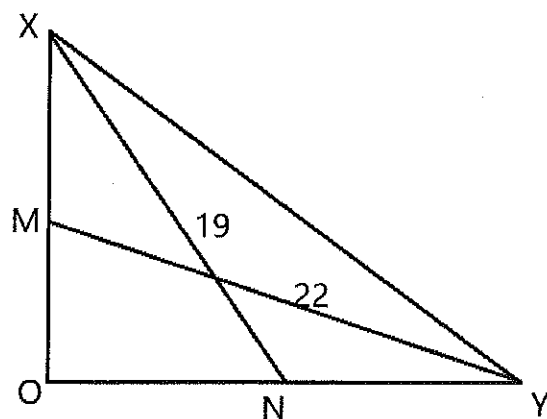
Beth 所需时间为: $\frac{3x}{2y} = \frac{1.5x}{y}$, Carlos 所需时间为: $\frac{2x}{y}$, 因此 Beth 所需时间最

短, 选 B。

Problem 22

考点: 平面几何

解答:



关键思路解析: $XY=2MN$, 因为 MN 是中位线(midsegment). 下面只要求出 MN 的长度, 那么 XY 就得到了. MN 的长度可以放在直角三角形 OMN 中用勾股定理求得, 那么就需要得到 MO 和 NO 的长度, 而它们的长度可以通过 $XN=19$ 和 $MY=22$ 运用勾股定理建立方程组得到.

解答: 设 $MO=x$, $NO=y$, 则 $XO=2x$, $YO=2y$, 在直角三角形 XON 和 YOM 中分别使用勾股定理, 得,

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 19^2 \\ x^2 + 4y^2 = 22^2 \end{cases}, \text{解得}, \begin{cases} x^2 = 64 \\ y^2 = 105 \end{cases}, \text{所以}, MN^2 = x^2 + y^2 = 169, \quad MN=13,$$

$XY=2MN=26$. 选 B

Problem 23

考点: 数列

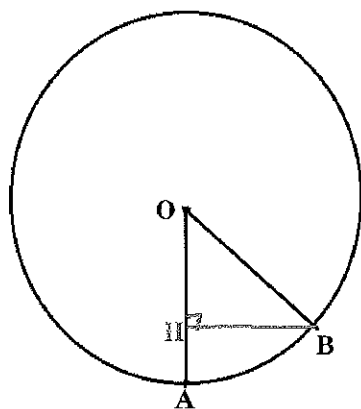
解答: $a_2 = a_1 + a_1 + 1 \times 1 = 3$; $a_3 = a_1 + a_2 + 1 \times 2 = 1 + 3 + 2 = 6$;

$a_6 = a_3 + a_3 + 3 \times 3 = 6 + 6 + 9 = 21$; $a_{12} = a_6 + a_6 + 6 \times 6 = 21 + 21 + 36 = 78$, 选 D。

Problem 24

考点: 平面几何

解答:



如图, A 为最低点。B 点和 A 点的垂直距离 $AH=10$, 所以 $OH=20-10=10$, 所以在直角 $\triangle BOH$ 中, $\angle O=60^\circ$ 。因为轮子每分钟转一圈, 所以每秒钟转过的角度为 $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$ 。那么转过 60° 需要时间 10 秒, 选 D。

Problem 25

考点: 数据分析 (平均值)

解答: 令 n 表示原始数列里整数的个数, m 为原始数列各项的平均值。那么 mn 即为原始数列的各项总和。当尾部添加 15 后, 拓展后的数列共有 $n+1$ 项, 平均值为 $m+2$, 那么拓展数列的各项总和为 $(m+2)(n+1)$, 比原来的总和 mn 多 15, 即,

$$mn + 15 = (m + 2)(n + 1) = mn + m + 2n + 2,$$

同理, 我们还可以得到方程:

$$mn + 16 = (m + 1)(n + 2) = mn + 2m + n + 2.$$

第一个方程化简为: $13 = m + 2n$; 第二个方程化简为: $14 = 2m + n$ 。解这个

方程组得到, $m = 5$ 和 $n = \boxed{(A)4}$ 。