

2003 AMC10A 解答

Problem 1

考点：算术

解答：前 2003 个偶正整数为 $2, 4, 6, \dots, 4006$ ，前 2003 个奇正整数为

$1, 3, 5, \dots, 4005$ 。因此它们的差为：

$$\begin{aligned} (2 + 4 + 6 + \dots + 4006) - (1 + 3 + 5 + \dots + 4005) &= (2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \dots + (4006 - 4005) \\ &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = \boxed{(D) 2003} \end{aligned}$$

Problem 2

考点：算术

解答：每件 T 恤的价格为 9 美元。每个成员在主客场的总费用是 $2 \times (4 + 9) = 26$ 美

元，那么联盟中成员的个数是 $\frac{2366}{26} = 91$ 人，选 B。

Problem 3

考点：立体几何

解答：原来盒子的体积是 $15 \cdot 10 \cdot 8 = 1200$ ，被移除的每个正方体的体积是

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ 。因为盒子共有 8 个角落，因此移除的总体积为 $8 \cdot 27 = 216$ 。因

$$\text{此移除的体积所占原来总体积的百分数为 } \frac{216}{1200} \cdot 100 = \boxed{(D) 18\%}。$$

Problem 4

考点：算术

解答：因为她从家到学校步行 1 千米，且从学校到家也是 1 千米，所以她往返的

总路程为 $1 + 1 = 2$ 千米。因为她从家到学校走了 30 分钟，从学校到家走了 10

分钟,所以往返的总时间为 $30 + 10 = 40$ 分钟 $= \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ 小时。因此她往返的平

均速度是 $\frac{2}{\frac{2}{3}} = \boxed{(A) 3}$ 千米每小时。

Problem 5

考点: 韦达定理

解答: 由韦达定理, $\begin{cases} d+e = -\frac{3}{2} \\ de = -\frac{5}{2} \end{cases}$, 所以 $(d-1)(e-1) = de - (d+e) + 1 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 0$,

选 B.

Problem 6

考点: 算术

解答: 选项 A 中, 因为 $x \heartsuit y = |x-y|$, $y \heartsuit x = |y-x|$, 而 $|x-y| = |y-x|$, 因此 $x \heartsuit y = y \heartsuit x$ 对所有 x 和 y 均成立, A 正确。

选项 B 中, $2(x \heartsuit y) = 2|x-y|$, $(2x) \heartsuit (2y) = |2x-2y| = 2|x-y|$, 因此 B 正确。

选项 C 中, $x \heartsuit 0 = |x-0| = |x|$, 不一定等于 x , 只有当 $x \geq 0$ 时才等于 x , 因此 C 不正确。

选项 D 中, $x \heartsuit x = |x-x| = 0$, 因此正确。

选项 E 中, $x \heartsuit y = |x-y| > 0$, 当 $x \neq y$ 。因此正确。

综上, 答案选 C.

Problem 7

考点：平面几何（三角形内的不等式）+排列组合

解答：假设三角形的三条边为 $x \geq y \geq z$ ，因此还需要满足 $\begin{cases} x+y+z=7 \\ y+z > x \end{cases}$ ，即

$7-x > x$ ，而 $x < 3.5$ ，而 x 是个整数，因此 $x=3, 2, 1$ 。

①当 $x=3$ 时， $\begin{cases} y+z=4 \\ z \leq y \leq 3 \end{cases}$ ，则此时， $\begin{cases} y=3 \\ z=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y=2 \\ z=2 \end{cases}$ ，对应 2 个不全等的三角形。

②当 $x=2$ 时， $\begin{cases} y+z=5 \\ z \leq y \leq 2 \end{cases}$ ，由第二个不等式， $y+z \leq 4$ 与第一个方程矛盾。因此

$x=2$ 不成立。 $x=1$ 无需再考虑。

综上，共有 2 个符合要求的三角形，选 B。

Problem 8

考点：数论（因子个数定理）+概率

解答：因为 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ ，所以 60 的正因子有 $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ 个，其中小

于 7 的正因子有 1, 2, 3, 4, 5, 6 共 6 个，因此概率为 $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ，选 E。

Problem 9

考点：幂运算

解答：

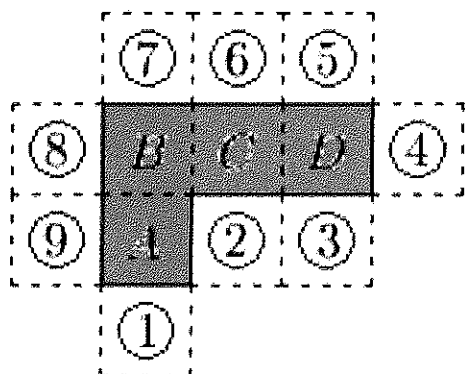
因为 $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{(\sqrt{x})^2 \cdot \sqrt{x}} = \sqrt[3]{(\sqrt{x})^3} = \sqrt{x}$ ，所以有：

$$\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}} = \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow \boxed{(A) \sqrt{x}}$$

Problem 10

考点：立体几何

解答：



如图，四个正方形分别标记为 A , B , C 和 D 。当将多边形折叠时， A 的右边会和 C 的底边重合，而 A 的底边会和 D 的底边重合，因此凡是和 A 的右边或底边，或 C 的底边，或 D 的底边连接的正方形均不用考虑，因此排除正方形 1, 2, 3。

而正方形 4, 5, 6, 7, 8, 9 均可以形成满足要求的正方体。答案选 (E) 6。

Problem 11

考点：算术

解答：由题意可以得如下算式：

$$AMC10 + AMC12 = 123422$$

$$AMC00 + AMC00 = 123400$$

$$AMC + AMC = 1234$$

$$2 \cdot AMC = 1234$$

$$AMC = \frac{1234}{2} = 617$$

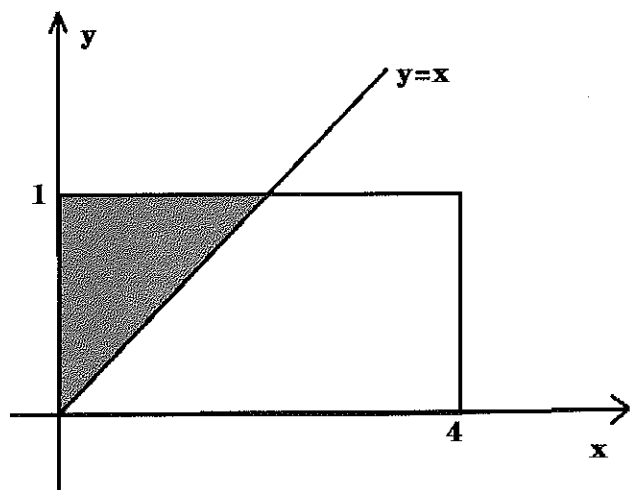
因为 A , M , C 都是 1 位数，因此， $A = 6$, $M = 1$, $C = 7$ 。

那么， $A + M + C = 6 + 1 + 7 =$ (E) 14。

Problem 12

考点：概率

解答：



当点位于矩形内直线 $y=x$ 的下方时，满足 $x < y$ ，如图中阴影三角形区域所示。

这个直角边长为 1 的等腰直角三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ ，而矩形的面积为 4，

因此概率为 $P = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$ ，选 A.

Problem 13

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设第一个数，第二个数和第三个数分别是 x, y ，和 z 。则

$$y = 7z$$

$$x = 4(y + z) = 4(7z + z) = 4(8z) = 32z$$

$$x + y + z = 32z + 7z + z = 40z = 20$$

$$z = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$y = 7z = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x = 32z = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16$$

因此这 3 个数乘积为 $xyz = 16 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = 28 \Rightarrow \boxed{(A) 28}$.

Problem 14

考点: 数论 (质数)

解答: 一位质数有 2, 3, 5, 7. 要使得乘积最大, 我们应当使得 d, e , 和 $10d + e$ 尽可能大。而 d 和 e 分别是质数 $10d + e$ 的十位数字和个位数字, 因此我们分别由大到小检验 75, 73, 72, 53, 52, 32, 找到第一个质数即可。73 是从大到小检验中, 得到的第一个质数, 因此 d, e , 和 $10d + e$ 分别是 7, 3, 73, 它们的乘积为 $7 \times 3 \times 73 = 1533$, 所有位数字之和是 12, 选 A。

Problem 15

考点: 概率+数论 (倍数的个数)

解答: 先计算出集合内所有偶数的个数, 再减去能同时被 2 和 3 整除的数的个数, 即为能被 2 整除但不能被 3 整除的数的个数。

集合 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 内的偶数个数为: 50 个。其中能同时被 2 和 3 整除的数 (即 6 的倍数) 的个数为: $\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$, 因此能被 2 但不能被 3 整除的数的个数为:

$50 - 16 = 34$ 个, 概率为 $P = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$, 选 C。

Problem 16

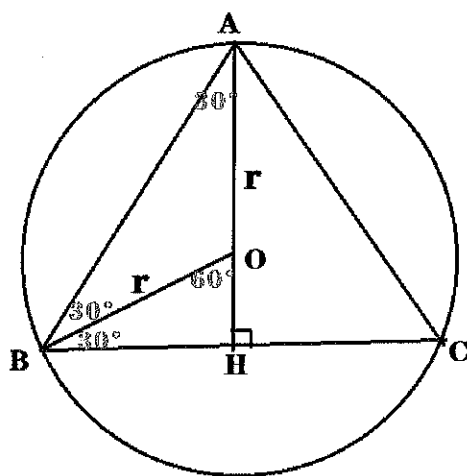
考点: 数论 (模运算, 欧拉定理) (模运算和欧拉定理在店内双语教材有详解)

解答：要求个位数字，其实即是求 13^{2003} 模 10 的余数。 $13^{2003} \equiv 3^{2003} \pmod{10}$ ，而由欧拉定理， $3^{\varphi(10)} = 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ ，因此两边 500 次方， $3^{2000} \equiv 1 \pmod{10}$ ，而 $3^3 = 27 \equiv 7 \pmod{10}$ ，因此 $3^{2003} \equiv 1 \times 7 \equiv 7 \pmod{10}$ ，答案选 C。

Problem 17

考点：平面几何

解答：



假设圆的半径为 r ，如上图，由于 $\triangle BHO$ 为 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形，斜边为 r ，

则 $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ ，因此 $BC = \sqrt{3}r$ 。那么 $3\sqrt{3}r = \pi r^2$ ，解得， $r = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ ，选 B。

Problem 18

考点：多项式（韦达定理）

解答：显然 $x \neq 0$ ，两边乘以 $2004x$ ，则 $2003x^2 + 2004x + 2004 = 0$ ，由韦达定理，

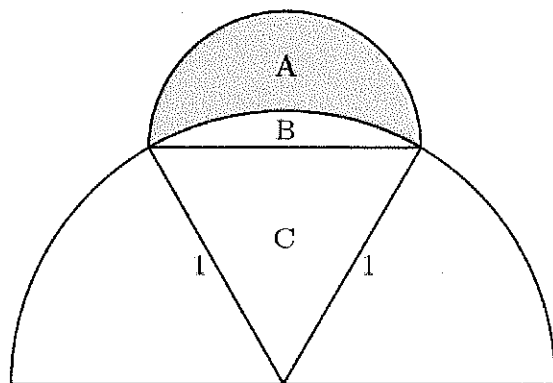
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2004}{2003} \\ x_1 x_2 = \frac{2004}{2003} \end{cases}, \text{ 其中 } x_1, x_2 \text{ 为方程的两个根。所以 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{2004}{2003}}{\frac{2004}{2003}} = -1,$$

因此选 B。

Problem 19

考点：平面几何

解答：



新月形 A 的面积可以看成小半圆的面积减去 B 的面积，而 B 的面积可以看成是扇形 $[B + C]$ 的面积减去等边三角形 $[C]$ 的面积。

小半圆的面积是 $[A + B] = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi$ 。因为图中三角形是个等边三角形，所以扇形 $[B + C]$ 的圆心角为 60° ，因此扇形的面积

$$\text{为 } [B + C] = \frac{60}{360}\pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}\pi.$$

$$\text{而等边三角形的面积是 } [C] = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

因此 B 的面积是： $[B] = [B + C] - [C] = \frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，那么新月形的面积为：

$$[A] = [A + B] - [B + C] + [C] = \left(\frac{1}{8}\pi\right) - \left(\frac{1}{6}\pi\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boxed{(C) \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{24}\pi}$$

Problem 20

考点：数论（进制）+ 概率

关键思路解析: 所有的 10 进制 3 位数里, 能够表示成 9 进制的 3 位数一定是在某个范围内的数字, 同样能够表示成 11 进制的 3 位数的也在某个范围内. 题目中要求这两个条件同时满足, 即是求这 2 个范围的交集(intersection).

解答:

1. 先求 9 进制的 3 位数的范围: 9 进制的 3 位数最小是: $(100)_9 = 81$, 最大为:

$$(888)_9 = 728$$

2. 再求 11 进制的 3 位数的范围: 11 进制的 3 位数最小是: $(100)_{11} = 121$, 最大为:

$$(AAA)_{11} = 1330.$$

所以这两者的交集为 $n \in [121, 728]$, 这之中一共有 608 个数字. 所以概率为

$$P = \frac{608}{900} = 0.68 \approx 0.7, \text{ 选 E.}$$

Problem 21

考点: 球和罐子模型

关键思路解析: 这道题是要求从 3 个盘子里去选择 6 个饼干. 这里满足总数一定, 关键是如何分配这 6 个饼干. 相当于 6 个球放入 3 个罐子, 罐子可以为空(罐子为空对应于有 1 种或者 2 种饼干没有选到). 所以这就成了球和罐子, 罐子可以为空的模型.

解答: 6 个球放入 3 个罐子, 罐子可以为空, 方法数: $C_{6+3-1}^{3-1} = C_8^2 = 28$, 选 D.

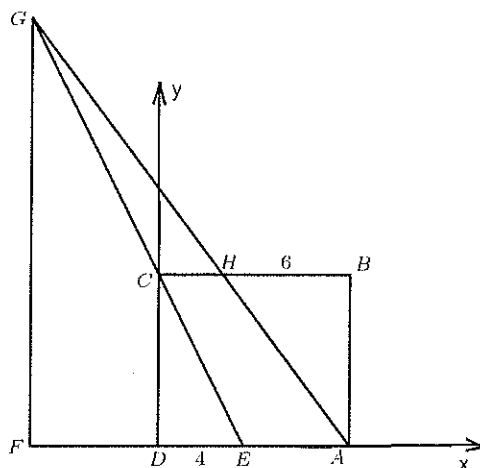
Problem 22

考点: 平面几何(相似三角形)

方法 1: 相似三角形的方法。

以为 $CH//EA$, 所以 $\frac{GC}{GE} = \frac{CH}{EA} = \frac{3}{5}$, 则 $\frac{EC}{EG} = \frac{2}{5}$ 。因为 $CD//GF$, 所以 $\frac{CD}{GF} = \frac{EC}{EG}$, 即 $\frac{8}{GF} = \frac{2}{5}$, 解得, $GF = 20$, 选择 B。

方法 2: 解析几何



我们这里用直线方程来做. 以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, 建立如图所示的坐标系. 要求 GF 的长度即为 G 的 y 坐标. 所以只要求出 G 的坐标即可.

C(0,8), E(4,0), A(9,0), H(3,8), 那么 CE 直线方程为: $y = -2(x-4)$, AH 直线方程为:

$y = -\frac{4}{3}(x-9)$. 两直线方程联立方程组得, $x = -6, y = 20$, 那么 $FG = 20$.

Answer: B

Problem 23

考点: 数列

解答: 先算小三角形的个数, 总共有 $1+3+5+7+\dots+2003 = \frac{2004 \times 1002}{2} = 1002^2$ 个。

(注意: 这里有 1002 项, 表示共 1002 行)。每个三角形需要 3 根牙签, 共需要 3×1002^2 根牙签。但是注意到, 大三角形内部的牙签每根都被重复计数 1 次, 而边上的牙签则是只计数 1 次。因为大三角形三边上牙签的总根数是: 3×1002 ,

因此内部的牙签数为： $\frac{3 \times 1002^2 - 3 \times 1002}{2} = 3 \times 501 \times 1001 = 1504503$ 根。因此需要

的牙签总根数为 $3 \times 1002 + 1504503 = 1507509$ ，选 C。

Problem 24

考点：数论（整除）

解答：

1	4	红
2	4	蓝
3	2	红
4	6	蓝
5	3	红
6	3	蓝
7	1	红
8	5	蓝
9	5	红

因为红牌比蓝牌多一张，所以顶面和底面的牌均为红色。位于中间的红牌（即上下都有蓝牌的红牌）上的数字需要能够整除 2 个数，而位于顶面或底面的红牌只需要整除一个数。1 到 5 中，只有 4 和 5 只能整除 3 到 6 中仅仅一个数，分别是 4 和 5，其余数能整除 3 到 6 中至少 2 个数。因此上下面必定为 4 和 5（不一定以这样的顺序）。不妨假设顶面（第 1 张牌）为红 4，底面（第 9 张牌）为红 5。

因为顶面的4必须能整除第2张牌(蓝色),所以第2张只能是4;同样,底面的5必须能整除第8张牌(蓝色),所以第8张只能是5.至于第7张牌(红色),它必须整除5,而红色目前剩下1,2,3这3个数字,能整除5的只有1,因此第7张为1.至于第3张牌(红色),必须从2和3中选一个能整除4的数,只能是2,因此第3张牌是2.那么第5张牌(红色)只能是3.而此时第5张牌的上下两张蓝色的牌只能是3和6.我们此时不必判断何种顺序,因为只要求中间3张的和,为 $6+3+3=12$,选E.

Problem 25

考点: 数论(模运算,倍数的个数)

解析: 先根据题意,列出 n, q, r 所满足的关系式,然后通过观察关系式,进行合理的模运算化简,最终得到 n 的特征.

解答: $n = 100q + r$, 且 $q + r \equiv 0 \pmod{11}$

观察到 q 和 $100q$ 相差 $99q$,而 99 恰好又是 11 的倍数,所以第二个式子两边加 $99q$,得到 $100q + r \equiv 0 \pmod{11}$,即, $n \equiv 0 \pmod{11}$. 5位数里 11 的倍数总共

有 $\left\lfloor \frac{99999}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9999}{11} \right\rfloor = 9090 - 909 = 8181$ 个. 其中 $\left\lfloor \frac{99999}{11} \right\rfloor$ 表示1到99999之间

11 的倍数的个数, $\left\lfloor \frac{9999}{11} \right\rfloor$ 表示1到9999之间 11 的倍数的个数. 选B.