

2003 AMC10B 试题解答

Problem 1

考点：算术

解答：

$$\begin{aligned}2 + (-4 + 6) + (-8 + 10) + (-12 + 14) &= 2 * 4 \\3 + (-6 + 9) + (-12 + 15) + (-18 + 21) &= 3 * 4 \\ \frac{2 * 4}{3 * 4} &= \frac{2}{3} \Rightarrow (C)\end{aligned}$$

Problem 2

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设一粒绿色药丸 x 美元，则一粒粉色为 $x-1$ 美元。2 周内总共服用绿色药丸 14 粒，粉色药丸 14 粒，因此 $14(x+x-1)=546$ ，解得， $x=20$ 美元，选 D。

Problem 3

考点：算术

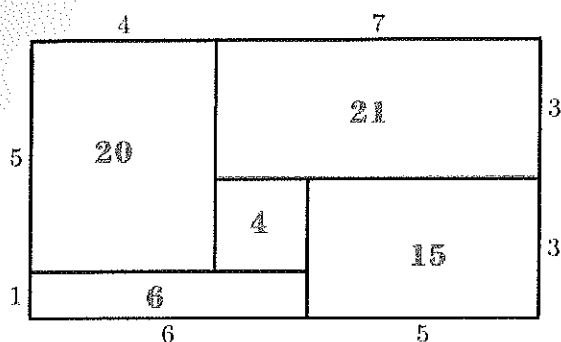
解答：假设这 5 个连续偶整数分别是 $x, x+2, x+4, x+6, x+8$ ，则有

$$5x+20=(1+3+5+7+9+11+13+15)-4=60, \text{ 解得, } x=8, \text{ 选 B.}$$

Problem 4

考点：平面几何

解答：要使得成本最低，则贵的花应该种在面积小的矩形里，而大的矩形应该种便宜的花。各个矩形的面积如下图所标：



各个矩形面积从大到小排序为：21 > 20 > 15 > 6 > 4，花的单价按照从低到高排序为：1 < 1.5 < 2 < 2.5 < 3。因此最低成本是

$$21 \times 1 + 20 \times 1.5 + 15 \times 2 + 6 \times 2.5 + 4 \times 3 = 21 + 30 + 30 + 15 + 12 = 108 \text{ 美元，选 A。}$$

Problem 5

考点：算术

解答：假设 Moe 沿着平行于长度为 150 英尺的边修剪。首次修剪的宽度是 28 英寸，后面修剪的有效宽度为 24 英寸。注意到，当剩下需修剪的宽度不足 24 英寸时，仍需修剪一次。而 90 英尺等于 $90 \times 12 = 1080$ 英寸。因此一共需要来回的次数为 $1 + \left\lceil \frac{1080 - 28}{24} \right\rceil = 1 + 44 = 45$ 次。所走的总长度为 150×45 英尺。而他每小时走 5000 英尺，因此需要 $\frac{150 \times 45}{5000} = 1.35$ 小时，选 C。

注意： $\lceil x \rceil$ 是向上取整的符号，表示取大于等于 x 的最小整数。

Problem 6

考点：平面几何（勾股定理）

解答: 如上图所示, 阴影部分是个直角三角形, 因为长和高之比为4:3, 设长为 $4x$, 则高为 $3x$, 那么对角线长为 $5x=27$, $x=\frac{27}{5}=5.4$, 那么电视屏幕的水平长度为 $5.4 \times 4 = 21.6$, 最接近 **(D) 21.5**。

Problem 7

考点: 代数 (地板函数)

解答: 前三项都等于1, 接下来五项都等于2, 接下来七项都等于3, 最后一项等于4, 因此和为 $3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 3 + 10 + 21 + 4 =$ **(B) 38**

Problem 8

考点: 等比数列

解答: 假设公比为 r , 所以 $a_2 r^2 = a_4$, 即 $2r^2 = 6$, 那么 $r = \pm\sqrt{3}$, 因此第一项为

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 选 B.}$$

Problem 9

考点: 幂运算

解答: $\text{右边} = \frac{5^{48/x}}{5^{26/x} \cdot 5^{34/x}} = 5^{48/x - 26/x - 34/x} = 5^{-12/x}$, 同时 $\text{左边} = 25^{-2} = (5^2)^{-2} = 5^{-4}$, 所以

$$-\frac{12}{x} = -4, x = 3$$

Answer: B

Problem 10

考点: 排列组合

解答：旧车牌共有 $26 \cdot 10^4$ 个，新车牌共有 $26^3 \cdot 10^3$ ，那么新车牌数量是原来旧车

牌的 $\frac{26^3 \cdot 10^3}{26 \cdot 10^4} = \frac{26^2}{10}$ 倍，选 C。

Problem 11

考点：解析几何（直线方程）

解答：斜率为 3 的直线过点 $(10, 15)$ ，则直线方程为 $y - 15 = 3(x - 10)$ ，即 $y = 3x - 15$ ，

它的 x 截距为 $(5, 0)$ 。斜率为 5 的直线过点 $(10, 15)$ ，则直线方程为 $y - 15 = 5(x - 10)$ ，

即 $y = 5x - 35$ ，它的 x 截距为 $(7, 0)$ 。因此两个 x 截距之间的距离为 2，选 A。

Problem 12

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设 Al 的初始金额是 x 美元，则 Betty 和 Clare 总共分得 $1000 - x$ 美元。

而 Betty 和 Clare 的金额在年末时都翻倍，则 Betty 和 Clare 在年末总共有

$2(1000 - x)$ 美元，而 Al 在年末有 $x - 100$ 美元。那么有 $2(1000 - x) + x - 100 = 1500$ ，

解得， $x = 400$ 美元，选 C。

Problem 13

考点：算术

解答：因为 x 为两位数，假设十位数字是 A，个位数字是 B，则 $\clubsuit(x)$ 可能是 1

位数，也可能是 2 两位数。

①若 $\clubsuit(x)$ 是 1 位数，因为 $\clubsuit(\clubsuit(x)) = 3$ ，则 $\clubsuit(x) = 3$ ， $A + B = 3$ ，则 $A = 1$ ， $B = 2$ ；

或 $A = 2$ ， $B = 1$ ；或 $A = 3$ ， $B = 0$ 。因此 x 共有 3 种可能性：12, 21, 30。

②若 $\clubsuit(x)$ 是2位数,因为 $\clubsuit(\clubsuit(x))=3$,则 $\clubsuit(x)=12,21$,或30,因此 $A+B=12,21$,或30.但 $0\leq A\leq 9,0\leq B\leq 9$,所以 $0\leq A+B\leq 18$,因此只能是 $A+B=12$,则 $A=3,4,5,6,7,8,9$,每种对应唯一的 B 。因此 x 共有7种可能性:39,48,57,66,75,84,93.

综上,共有 $3+7=10$ 个这样的 x ,选E。

Problem 14

考点:代数(幂运算)

解答: $3^8 \cdot 5^2 = (3^8 \cdot 5^2)^{\frac{1}{2}} = (3^4 \cdot 5)^2$, 可以看到最小值为 $a+b=3^4 \cdot 5+2=407$, 选D.

Problem 15

考点:数论(整除)

解答:因为每场比赛淘汰掉一个选手,而最终需要淘汰掉99个选手,因此需要打99场比赛,而99能被11整除,选E。

Problem 16

考点:排列组合

解答:2003年一共有365天,所以不同晚餐的组合至少要有365种。假设主菜有 x 道,那么开胃菜有 $2x$ 道,则可以组成的不同的晚餐数为 $x \cdot 2x \cdot 3 = 6x^2 \geq 365$,解得,将选项答案从小到大依次代入检验,发现当 $x=8$ 时, $6x^2 = 6 \times 64 = 384 \geq 365$ 满足不等式,因此 x 最少为8,选E.

Problem 17

考点:立体几何

解答： 令 r 表示圆锥体和球体的半径， h 为圆锥体的高度。因为融化的冰淇淋的体积是球体积的 75%，意味着圆锥体体积为球体积的 75%，即，

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 75\% \cdot \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ 化简得,}$$

$$\pi r^3 = \pi r^2 h / 3$$

$$r = h/3$$

$$3 = h/r$$

因此圆锥体的高和半径之比为 $h:r = \boxed{\text{(B)} 3:1}$ 。

Problem 18

考点：数论（整除）

解答： 首先，证明 $3|(n+1)(n+3)(n+5)$ 。若 $n+1 \equiv 0(\text{mod } 3)$ ，则得证；若

$n+1 \equiv 1(\text{mod } 3)$ ，则 $n+3 \equiv 1+2 \equiv 0(\text{mod } 3)$ ，得证；若 $n+1 \equiv 2(\text{mod } 3)$ ，则

$n+5 \equiv 1+5 \equiv 0(\text{mod } 3)$ ，得证。因此 $3|(n+1)(n+3)(n+5)$ ；

同理，对 $n+1 \equiv 0, 1, 2, 3, 4(\text{mod } 5)$ 分类讨论，可以证明，

$5|(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$ 。因此， $(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$

可以同时被 3 和 5 整除，那么就能被 15 整除。

但 $(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$ 不能被 11 整除。反例：当 $n=12$ ，

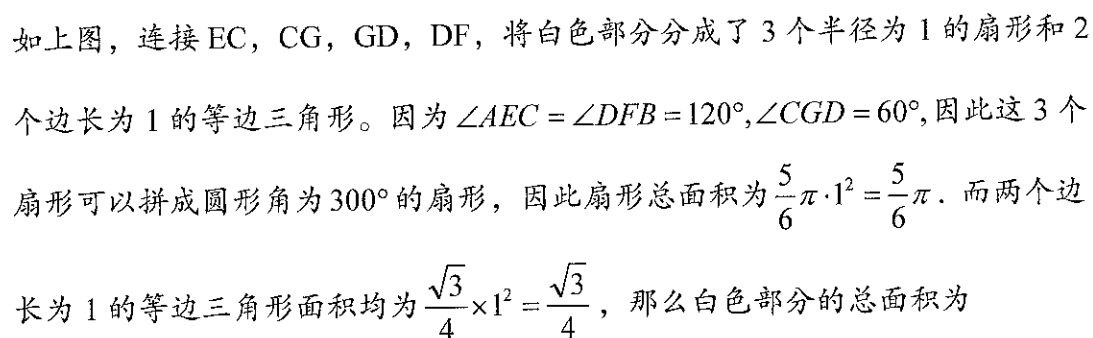
$(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9) \equiv 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \not\equiv 0(\text{mod } 11)$ 。因此

$(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$ 的最大因子是 15，选 D。

Problem 19

考点：平面几何

解答：



$S_1 = \frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。那么阴影部分面积为 $S = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 - \frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，选 E。

考点：平面几何

解答：



过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H, 交 CD 于 M。设 $\triangle EAB$ 的高 $EH = h$, 那么 $\triangle EFG$ 的高

$EM = h - 3$, 由于 $FG \parallel AB$, 所以 $\triangle EFG \sim \triangle EAB$, 因此 $\frac{FG}{AB} = \frac{EM}{EH}$, 即 $\frac{2}{5} = \frac{h-3}{h}$,

解得, $h = 5$, 那么 $S_{\triangle EAB} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$, 选 D.

Problem 21

考点: 概率

解答: 3 次中必定有 2 次是拿出绿色。这里分类讨论。

①若拿出珠子的颜色第 1 次绿色, 第 2 次绿色, 第 3 次红色, 则概率为

$$P_1 = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8};$$

②若拿出珠子的颜色第 1 次绿色, 第 2 次红色, 第 3 次绿色, 则概率为

$$P_2 = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32};$$

③若拿出珠子的颜色第 1 次红色, 第 2 次绿色, 第 3 次绿色, 则概率为

$$P_3 = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16};$$

因此总的概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{9}{32}$, 选 C.

Problem 22

考点: 数论 (余数)

解答: 考虑到整点过 30 分也会报时 1 次, 因此时钟每经过 12 小时 (转 1 圈),

报时总次数为 $2 + 3 + 4 + \dots + 13 = \frac{15 \times 12}{2} = 90$ 次, 那么每经过 1 天会报时 180 次。

由于 $2003 \div 180 = 11$ 余数为 23, 所以经过 11 天后, 到了 3 月 9 日的上午 11:15 为

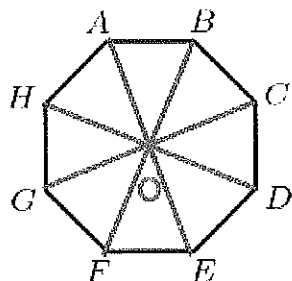
止, 还剩下 23 次报时, 而剩下这 23 次报时实际到下午 3:30 就可以报完。因此

第 2003 次报时出现在 3 月 9 日下午 3:30, 选 B.

Problem 23

考点：平面几何

解答：



如图连接各对角线交于点 O。因为八边形的面积为 8 倍的 $\triangle AOB$ 的面积，所以

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{8}$ 。此外， $S_{\triangle AOF} = S_{\triangle AOB}$ ，因为它们是等底同高的三角形。那么长方形

ABEF 面积为 $S_{ABEF} = 2S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle AOF} = 4S_{\triangle AOB} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ 。选 D。

Problem 24

考点：数列（等差数列）

解答：因为 $x+y, x-y, xy, x/y$ 成等差数列，因此 $x+y+\frac{x}{y} = x-y+xy$ ，化

简得， $(x-2)y^2 = x$ 。因为 $x+y, x-y, xy$ 成等差数列，因此 $x+y+xy = 2(x-y)$ ，

化简得， $y = \frac{x}{x+3}$ ，代入第一个方程， $(x-2)\left(\frac{x}{x+3}\right)^2 = x$ 。因为 $x \neq 0$ (若

$x=0, y = \frac{x}{x+3} = 0$ ，那么第四项 x/y 不存在)，所以 $(x-2)x = (x+3)^2$ ，解得， $x = -\frac{9}{8}$ ，

同时 $y = \frac{x}{x+3} = -\frac{3}{5}$ ，那么第四项为 $a_4 = \frac{x}{y} = \frac{15}{8}$ ，公差为

$d = x - y - (x + y) = -2y = \frac{6}{5}$ ，那么第五项为： $a_5 = a_4 + d = \frac{15}{8} + \frac{6}{5} = \frac{123}{40}$ ，选 E。

Problem 25

考点：数论（整除，模运算）

解答：假设这样的四位数为 $AB23$ ，则 $A+B+2+3 \equiv 0(\text{mod } 3)$ ， $A+B \equiv 1(\text{mod } 3)$ 。

而 $1 \leq A+B \leq 18$ ，所以 $A+B=1, 4, 7, 10, 13, 16$ 。若 $A+B=1$ ，则 $A=1, B=0$ 共 1 组解；

若 $A+B=4$ ，则 $A=1, 2, 3, 4$ ，分别对应唯一的 B ，共 4 组解；当 $A+B=7$ ，则

$A=1, 2, \dots, 7$ ，分别对应唯一的 B ，共 7 组解；当 $A+B=10$ ，则 $A=1, 2, \dots, 9$ ，分别

对应唯一的 B ，共 9 组解；当 $A+B=13$ ，则 $A=4, 5, \dots, 9$ ，分别对应唯一的 B ，

共 6 组解；当 $A+B=16$ ，则 $A=7, 8, 9$ ，分别对应唯一的 B ，共 3 组解；

综上， A, B 总共有 $1+4+7+9+6+3=30$ 组解，每一组解对应唯一的四位数，因

此总共有 30 个这样的四位数，选 B。