

2004 AMC10A 解答

Problem 1

考点：算术

解答：因为有 6 个人分配这 1500 美元的筹款任务，因此每个人需要筹款

$$\frac{1500}{6} = 250 \text{ 美元} \Rightarrow \boxed{\text{(A) } 250}.$$

Problem 2

考点：算术

解答：

$$\otimes \left(\frac{1}{2-3}, \frac{2}{3-1}, \frac{3}{1-2} \right) = \otimes(-1, 1, -3) = \frac{-1}{1+3} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\text{(B) } -\frac{1}{4}}$$

Problem 3

考点：百分数

解答：20 美元等于 2000 美分，并且 2000 美分的 1.45% 是 $0.0145 \times 2000 = 29$

$$\text{美分} \Rightarrow \boxed{\text{(E) } 29}.$$

Problem 4

What is the value of x if $|x-1| = |x-2|$?

如果 $|x-1| = |x-2|$ ，那么 x 的值是多少？

$$\text{(A) } -\frac{1}{2} \quad \text{(B) } \frac{1}{2} \quad \text{(C) } 1 \quad \text{(D) } \frac{3}{2} \quad \text{(E) } 2$$

考点：代数（解方程）

解答：由 $|x-1| = |x-2|$ 知， $x-1 = x-2$ 或 $x-1 = -(x-2)$ 。第一个方

程化简为 $-1 = -2$ ，因而无解。第二个方程解得， $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{(D) \frac{3}{2}}$ 。

Problem 5

考点：概率

解答：从 9 个点中选择 3 个点组成 3 点集合，一共有 $C_9^3 = 84$ 个。而三个点位于同一直线的情况数是：3 行，3 列，以及 2 条对角线，共 8 种情况。因此概率为

$$P = \frac{8}{84} = \frac{2}{21}, \text{ 选 C.}$$

Problem 6

考点：算术

解答：因为 Bertha 有 6 个女儿，那么她有 $30 - 6 = 24$ 个孙女，这些孙女都没有

女儿。而 Bertha 的 6 个女儿中， $\frac{24}{6} = 4$ 个女儿有女儿，因此 $6 - 4 = 2$ 个女儿

没有女儿。所以 Bertha 的女儿和孙女中，有 $24 + 2 = 26$ 人没有女儿，选 $\boxed{(E) 26}$ 。

Problem 7

考点：等差数列

解答：这个金字塔每层的长和宽都比下一层少 1，因此从底向上，各层桔子总数之和为 $5 \times 8 + 4 \times 7 + 3 \times 6 + 2 \times 5 + 1 \times 4 = 40 + 28 + 18 + 10 + 4 = 100$ 个，选 C。

Problem 8

考点：数列（周期数列）

解答：我们先写几个回合，看是否有周期性。一开始他们有 15,14,13，第 1 回合后，12,15,14；第 2 回合后，13,12,15；第 3 回合后，14,13,12；可以看到，在第 3 回合后，三人手里的令牌数又是连续整数，只是各减少 1。所以 3 为周期。因此最后一定可以达到状态，3,2,1，每个人手里减少 12 个牌，共经过 $12 \times 3 = 36$ 个回合。从 3,2,1 开始，再经过一个回合，变成 0,3,2，则游戏结束。因此一共将有 $36+1=37$ 个回合，选 B。

Problem 9

考点：平面几何

解答：令符号 $[X]$ 表示图形 X 的面积。注意到，

$$[\triangle BEA] = [\triangle ABD] + [\triangle ADE], \text{ 且 } [\triangle BCA] = [\triangle ABD] + [\triangle BDC],$$

则，

$$[\triangle ADE] - [\triangle BDC] = [\triangle BEA] - [\triangle BCA] = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 - \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \boxed{(B) 4}$$

Problem 10

考点：概率

解答：我们需要对正面的次数进行分类讨论：

$$\textcircled{1} \text{ 若正面次数均为 0。概率为 } P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{128}。$$

$$\textcircled{2} \text{ 若正面次数均为 1。概率为 } P_2 = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{12}{128}。$$

$$\textcircled{3} \text{ 若正面次数均为 2。概率为 } P_3 = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{18}{128}。$$

③若正面次数均为3。概率为 $P_3 = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{128}$ 。

综上，总的概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{35}{128}$ ，选 D。

Problem 11

考点：百分数

解答：假设原来的直径为 d ，高度为 h ，新的高度为 H ，新的直径为 $1.25d$ 。由于

体积相等，则 $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \pi \left(\frac{1.25d}{2}\right)^2 H$ ，解得， $H = \frac{16}{25}h$ ，所以 H 比 h 减少了

$$\frac{h - \frac{16}{25}h}{h} = \frac{9}{25} = 36\%，选 C。$$

Problem 12

考点：排列组合

解答：顾客先选肉饼，方法数是3种。再选口味，有

$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + \dots + C_8^8 = 2^8 = 256$ ，那么汉堡包的种类有 $3 \times 256 = 768$ 种，选 C。

Problem 13

考点：简单排列组合

解答：每个男士和3个女士跳舞，而有12个男士，所以共跳了36次舞。假设有

x 个女士参加了聚会，因为每个女士和2个男士跳舞，则女士们总共跳了 $2x$ 次

舞，则 $36 = 2x$ ， $x = 18$ 。选 D。

Problem 14

考点：算术

解答：假设 Paula 的钱包中硬币的总个数为 x ，则她原来钱包里硬币的总价值是 $20x$ 分。增加一枚 25 分硬币后，均值为 21 美分，则 $\frac{20x+25}{x+1}=21$ ，解得， $x=4$ ，意味着原先 Paula 的钱包里总共 4 枚硬币，价值 80 美分，则它们是 3 枚 25 美分和 1 枚 5 美分，没有 1 角硬币，选 A。

Problem 15

考点：代数（不等式）

解答：将 $\frac{(x+y)}{x}$ 重新写成 $\frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$ 。

我们知道 $\frac{y}{x} < 0$ 因为 x 和 y 异号。因此要使得 $1 + \frac{y}{x}$ 最大，则需要使得 $|\frac{y}{x}|$ 最小，则应该使得 $|y|$ 最小，而 $|x|$ 最大。当 $(x, y) = (-4, 2)$ 时，取得最大值

$$\text{为, } \frac{x+y}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{(D) \frac{1}{2}}$$

Problem 16

考点：排列组合

解答：我们根据正方形的边长进行分类：

1×1 的正方形：恰好有一个可以包含黑色正方形。

2×2 的正方形：有 4 个包含黑色正方形。

3×3 的正方形：有 9 个包含黑色正方形。

4×4 的正方形：有 4 个包含黑色正方形。

5×5 的正方形：有 1 个包含黑色正方形。

$$\text{因此总共有 } 1 + 4 + 9 + 4 + 1 = 19 \Rightarrow \boxed{(D) 19}$$

Problem 17

考点：代数（行程问题，列方程解应用题）

解答：设跑道长度为 x 米。当她们第一次相遇时，Brenda 已经跑了 100 米，而 Sally 已经跑了 $\frac{x}{2} - 100$ 米。到了第二个相遇点时，Sally 已经跑了 150 米，而 Brenda 已经跑了 $x - 150$ 米。因为她们的跑步速度都是恒定的，因此，

$$\frac{v_{\text{Brenda}}}{v_{\text{Sally}}} = \frac{100}{\frac{x}{2} - 100} = \frac{x - 150}{150}, \text{ 解得, } x = 350 \Rightarrow \boxed{\text{(C) } 350}$$

Problem 18

考点：数列（等差数列和等比数列）

解答：令 d 为公差，则原先 3 个实数为 $9, 9+d, 9+2d$ ，则成等比数列的 3 个数为 $9, 11+d, 29+2d$ ，那么有

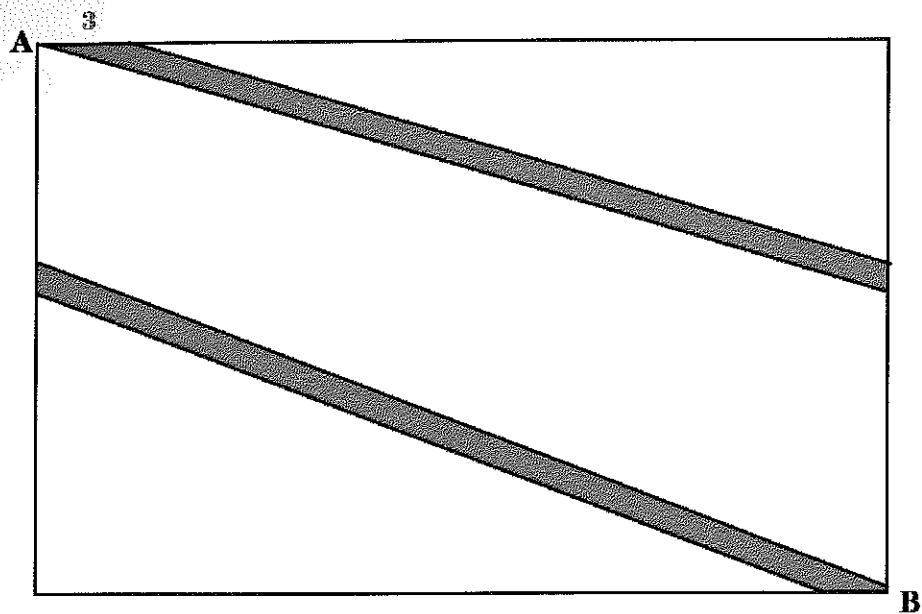
$$(11+d)^2 = 9(2d+29) \Rightarrow d^2 + 4d - 140 = (d+14)(d-10) = 0. \text{ 当 } d = -14 \text{ 时, 等比数列的第三项最小, 最小为 } 2(-14) + 29 = 1 \Rightarrow \boxed{\text{(A) } 1}.$$

Problem 19

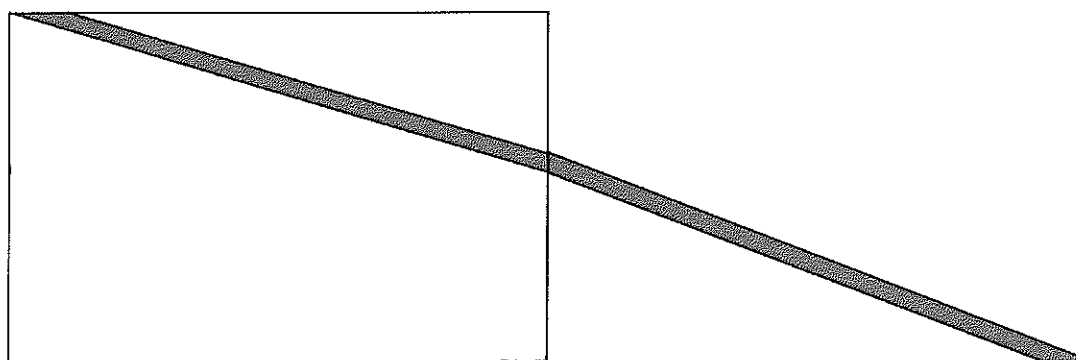
考点：立体几何

解答：

将此圆柱的侧面沿着图中虚线剪开并展开，得到如下所示的矩形：



图中有上下 2 段红条纹。再将下面的红条纹向右平移，使得左端和上面条纹的右端对齐，则形成一个底为 3，高为 80 的平行四边形，如下所示：



因此红条纹的面积是 $3 \times 80 = 240$ ，选 C。

Problem 20

考点：平面几何

解答：因为 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ， $BE = BF$ ，则 $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ，那么 $AE = CF$ ，因此，设 $DE = DF = 1$ ， $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}$ ，且 $EF = \sqrt{2}$ 。设 $AE = x$ ， $AB = AD = x + 1$ ，在

$\triangle ABE$ 中, 由勾股定理, $x^2 + (x+1)^2 = 2$, $2x^2 + 2x - 1 = 0$, $x^2 + x = \frac{1}{2}$ 。则

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}x(1+x) = \frac{1}{2}(x+x^2) = \frac{1}{4}, \text{ 那么 } \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2, \text{ 选 D.}$$

Problem 21

考点: 平面几何 (扇形的面积)

解答: 假设两条弦形成的锐角是 θ 弧度, 那么小圆内阴影部分面积是 $2 \times \frac{1}{2}\theta \cdot 1^2 = \theta$,

内层圆环阴影部分的面积是 $2[\frac{1}{2}(\pi - \theta) \cdot 2^2 - \frac{1}{2}(\pi - \theta) \cdot 1^2] = 3(\pi - \theta)$, 最外层圆环

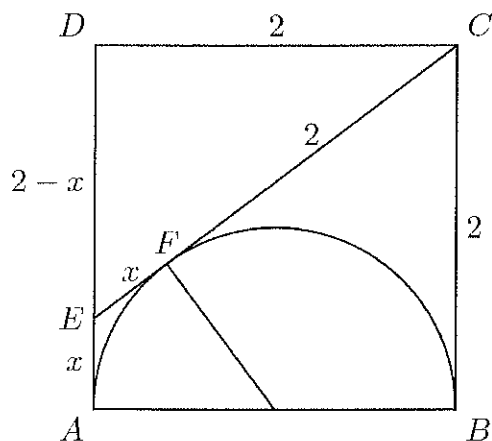
阴影部分的面积是: $2(\frac{1}{2}\theta \cdot 3^2 - \frac{1}{2}\theta \cdot 2^2) = 5\theta$ 。因此阴影部分总面积为

$\theta + 3(\pi - \theta) + 5\theta = 3\pi + 3\theta$ 。因为阴影区域的面积是非阴影区域的面积的 $\frac{8}{13}$, 意味着阴影区域的面积是总面积的 $\frac{8}{21}$, 即 $3\pi + 3\theta = \frac{8}{21}\pi \cdot 3^2$, 解得, $\theta = \frac{\pi}{7}$, 选 B。

Problem 22

考点: 平面几何 (切线长定理+勾股定理)

解答:



令切点为 F. 由切线长定理, $BC = FC = 2$, $AE = EF = x$ 。因此

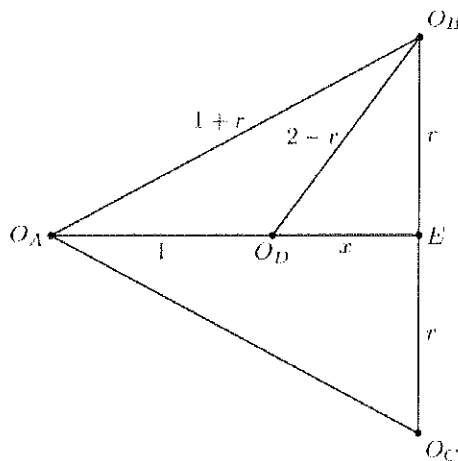
$DE = 2 - x$ 。在 $\triangle CDE$ 中应用勾股定理,

$$(2-x)^2 + 2^2 = (2+x)^2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

因此,

考点：平面几何（圆，勾股定理）



为圆 A 的直径, 等于 2. 设圆 B 半径为 r , 那么 $O_B O_D = O_D O_C = 2 - r$, 又

$O_B O_C$ 的中点 E, 且 $O_A O_D \perp O_B O_C$ 于 E. 由勾股定理, $O_D E = \sqrt{(2-r)^2 - r^2} = \sqrt{4-4r}$,

$$(1+\sqrt{4-4r})^2+r^2=(1+r)^2, \text{ 化简得, } 2-3r=2\sqrt{1-r}, \text{ 两边平方,}$$

$4-12r+9r^2=4(1-r)$, 得, $9r^2-8r=0$, $r=\frac{8}{9}$, 选 D.

Problem 24

考点：代数（函数或递推数列）

解答：假设 $a_n = f(2^n) = f(2 \cdot 2^{n-1}) = 2^{n-1} f(2^{n-1}) = 2^{n-1} a_{n-1}$ ，这是一个递推数列，且

$a_0 = f(2^0) = f(1) = 1$ ，所以：

$$a_{100} = 2^{99} a_{99}$$

$$a_{99} = 2^{98} a_{98}$$

$$a_{98} = 2^{97} a_{97}$$

...

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_1 = 2^0 a_0$$

以上各式全部相乘，得到 $a_{100} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^{99} a_0 = 2^{1+2+3+\cdots+99} = 2^{4950}$ ，即

$f(2^{100}) = 2^{4950}$ ，选 D。

Problem 25

考点：立体几何

解答：

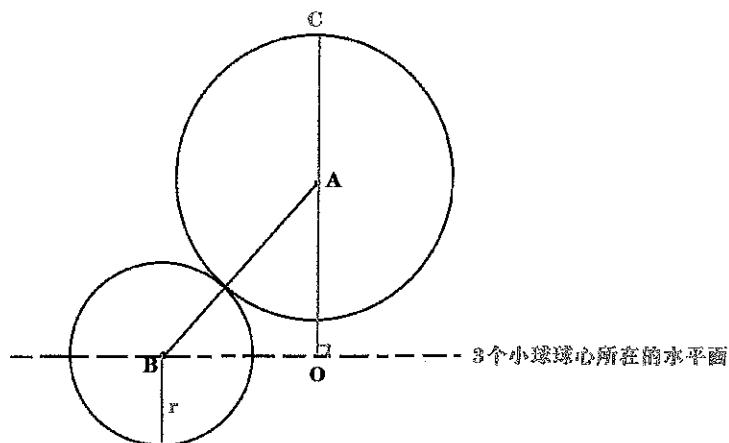


图1

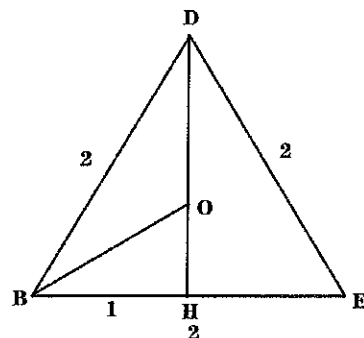


图2

如图 1 所示，将大球顶部 C 到地面的距离分为两段，第一段是 C 到三个小球球心所在水平面的距离 CO，第二段小球的半径 $r=1$ 。设三个小球球心分别是 B, D,

E, 根据对称性, 大球球心 A 在 $\triangle BDE$ 内的投影 O 为 $\triangle BDE$ 的外心 (因为 $AB=AD=AE$). 而因为 $\triangle BDE$ 是个边长为 2 的等边三角形, 所以 O 也为其重心, 如图 2 所示。那么 $DO = \frac{2}{3}DH = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $BO = DO = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 。在图 1 直角 $\triangle ABO$ 中, 因为 $AB=3, BO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $AO = \sqrt{3^2 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{23}{3}} = \frac{\sqrt{69}}{3}$, 那么 C 到地面的距离为: $2 + AO + 1 = 3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$, 选 B.