

2004 AMC10B 解答

Problem 1

考点: 算术

解答: 第 12 排到第 22 排总共 11 排, 而每排 33 个座位, 总共有 $11 \times 33 = 363$ 个座位, 选 C。

Problem 2

考点: 排列组合 (考虑反面或分类讨论)

解答: 总共有 $9 \times 10 = 90$ 个两位正整数。其中两个位上都不含有数字 7 的两位数有 $8 \times 9 = 72$ 个, 那么至少有一个位上的数字为 7 的两位数有 $90 - 72 = 18$ 个, 选 B。

Problem 3

考点: 数列 (等比数列)

解答: 珍妮的罚球次数从第 1 次到第 5 次成公比为 2 的等比数列。因此, $a_5 = a_1 \cdot 2^4$, 即 $48 = a_1 \cdot 16$, $a_1 = 3$ 。答案选 A。

Problem 4

考点: 数论 (最大公约数)

解答: 我们首先求 P 的所有 6 个可能值, 则这 6 个值的最大公约数便是符合要求的数。

因为所有 6 个数的乘积为 $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, 所以 P 的所有 6 个值是:

$$\frac{720}{1}, \frac{720}{2}, \frac{720}{3}, \frac{720}{4}, \frac{720}{5}, \frac{720}{6}, \text{ 即 } 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^4 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^4 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3 \cdot 5,$$

这 6 个数的最大公约数是 $2^2 \cdot 3 = 12$, 选 B。

Problem 5

考点：算术

解答：要使得结果最大，则 d 尽可能小，则 $d=0$ ，而 a 和 b 尽可能取大的值，即取 2 和 3（不一定以这样的顺序），此时 $c=1$ 。因为 $3^2 > 2^3$ ，所以表达式的最大可能值是 $1 \times 3^2 - 0 = 9$ ，选 D。

Problem 6

考点：数论（平方数）

解答：由 $n! = n \cdot (n-1)!$ ，我们可以得到以下：

$$A = 98! \cdot (99 \cdot 98!) = 99 \cdot (98!)^2 = 11 \cdot 3^2 \cdot (98!)^2 \quad (1)$$

$$B = 100 \cdot 99 \cdot (98!)^2 = 11 \cdot 10^2 \cdot 3^2 \cdot (98!)^2 \quad (2)$$

$$C = 100 \cdot (99!)^2 = 10^2 \cdot (99!)^2 \quad (3)$$

$$D = 101 \cdot 100 \cdot (99!)^2 = 101 \cdot 10^2 \cdot (99!)^2 \quad (4)$$

$$E = 101 \cdot (100!)^2 \quad (5)$$

可以看到， $\boxed{(C) \ 99! \cdot 100!}$ 是个完全平方数。因为 11 和 101 都是质数，因此其他选项都不是平方数。

Problem 7

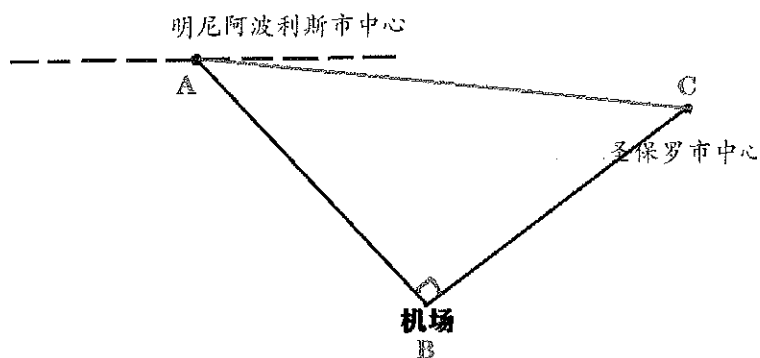
考点：比例

解答：原来 Isabella 带了 d 美元，兑换后变成 $60+d$ 加元。依据每 7 美元可以兑换 10 加元的比例关系，我们有 $\frac{7}{10} = \frac{d}{60+d}$ ，解得， $d=140$ ， $1+4+0=5$ ，选 A。

Problem 8

考点：平面几何（勾股定理）

解答：



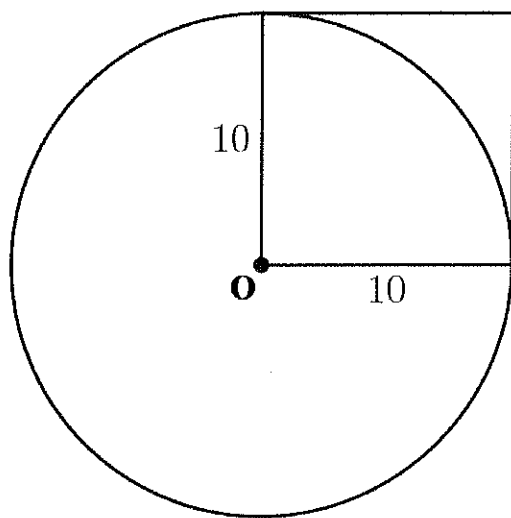
如图，因为西南方向和东南方向互相垂直，因此图中 $\triangle ABC$ 为直角三角形，

$\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $BC = 8$ ，那么 AC 长为 $\sqrt{8^2 + 10^2} \approx 12.8$ ，选 A。

Problem 9

考点：平面几何

解答：



所要求的的面积是由一个正方形及一个 $3/4$ 圆组成。正方形面积是 100， $3/4$ 圆的

面积是 $\frac{3}{4} \times \pi \times 10^2 = 75\pi$ ，所以要求的并集的面积是 $75\pi + 100$ ，选 B。

Problem 10

考点：数列（等差数列）

解答：罐头数从顶排到底排形成首项为 1，公差为 2 的等差数列。假设共 n 排，那么 $1+3+5+7+(2n-1)=100$ ，即 $\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2=100$ ，所以 $n=10$ ，选 D。

Problem 11

考点：概率+数论(不定方程(SFFT))

解答：假设第一个骰子顶面数字是 x ，第二个骰子顶面上数字是 y ，则要求

$xy > x+y$ ，即 $xy-x-y > 0$ ， $(x-1)(y-1) > 1$ 。而 $x-1$ 和 $y-1$ 原本是取 0 到 7 的数字，要满足不等式， $x-1$ 和 $y-1$ 均只能取 1 到 7 的数字，且不能同时为 1，总共有 $7 \times 7 - 1 = 48$ 种可能，对应 48 对 (x, y) 符合题目条件。因此概率为 $P = \frac{48}{8 \times 8} = \frac{3}{4}$ ，选 C。

Problem 12

考点：平面几何（勾股定理）

解答：大圆的面积是 πb^2 ，小圆的面积是 πc^2 ，因此环形空间的面积是 $\pi(b^2 - c^2)$ 。在直角三角形 OXZ 中，我们有 $a^2 + c^2 = b^2$ ，因此 $b^2 - c^2 = a^2$ ，那么环形空间的面积是 $\boxed{(A) \pi a^2}$ 。

Problem 13

考点：数论（线性不定方程）

解答：令 p, n, d, q 分别表示便士，镍币，一角硬币以及 25 分硬币的个数，那么我们有如下方程：

$155p + 195n + 135d + 175q = 1400$. 化简得,

$$31p + 39n + 27d + 35q = 280.$$

去解这么个4元线性不定方程肯定不现实, 因为这才第13题。我们可以如解2元线性不定方程那样, 两边取模。问题是模几?

注意到, 将方程中每个未知数的系数增加1, 则均变为4的倍数, 因此两边模4. 得到,

$-p - n - d - q \equiv 0 \pmod{4}$. 则 $p + n + d + q$ 能被4整除。而答案中能被4整除的只有 (B) 8. 实际上, 一种方法是8枚25分硬币(厚度1.75毫米), 正好可以叠成14毫米。

Problem 14

考点: 代数(比例)

解答: 当添加了红色玻璃球, 使得蓝色玻璃球占总数的 $\frac{1}{3}$ 时, 假设蓝色玻璃球有 x 个, 那么总数有 $3x$ 个, 红色玻璃球有 $2x$ 个。添加了黄色玻璃球后, 因为蓝色玻璃球占了总数的 $\frac{1}{5}$, 所以此时总数为 $5x$, 其中蓝色 x 个, 红色 $2x$ 个, 黄色 $2x$ 个。再将蓝色玻璃球翻倍, 现在蓝色 $2x$ 个, 而总数是 $6x$ 个, 蓝色所占比例是 $\frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$, 选C.

Problem 15

考点: 代数(列方程解应用题)

解答: 假设她有 n 个五分镍币和 $d = 20 - n$ 个一角硬币。那么这些硬币的总面值是 $5n + 10d = 5n + 10(20 - n) = 200 - 5n$ 美分。如果她的五分镍币都变

成一角硬币，而她的一角硬币都变成五分镍币，那么她将

有 $10n + 5d = 10n + 5(20 - n) = 100 + 5n$ 美分，而这个面值比原来面值多

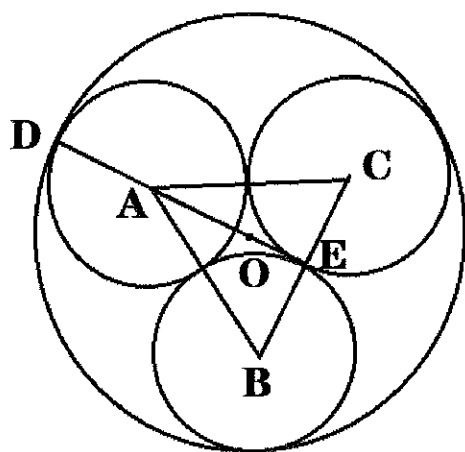
70 美分，我们有 $200 - 5n + 70 = 100 + 5n$ ，解得， $n = 17$ 。那么她的这些硬

币总面值是 $200 - 5n = \boxed{(A) \$1.15}$ 。

Problem 16

考点：平面几何(重心，特殊直角三角形)

解答：



如上图所示， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形。根据对称性，因为 $OA=OB=OC$ ，

因此 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，也为重心。所以 $\triangle ABE$ 是个 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角

形，则 $AE = \sqrt{3}$ ， $AO = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ，因此大圆半径 $DO = AO + AD = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$ ，

选 D。

Problem 17

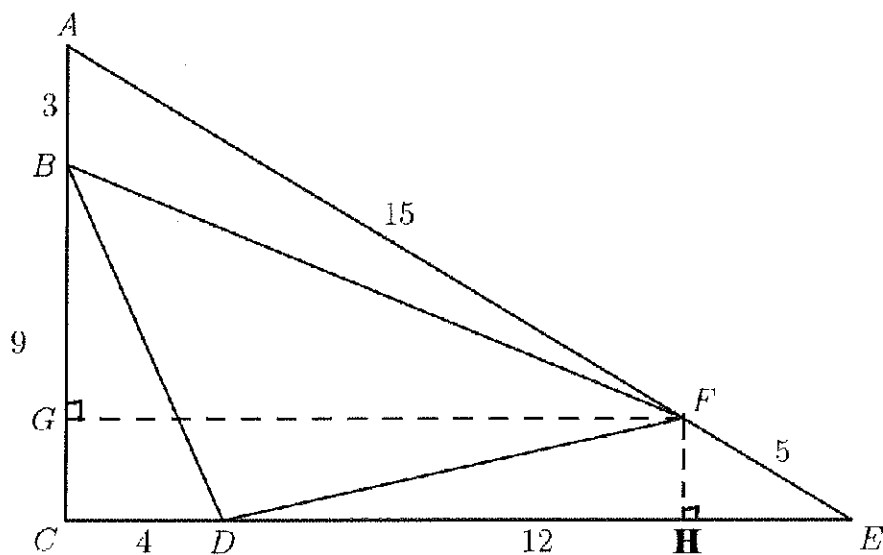
考点：代数(列方程解应用题)

解答：假设 Jack 的年龄是 $10A+B$ ，则 Bill 的年龄是 $10B+A$ 。因此 5 年后，
 $10A+B+5=2(10B+A+5)$ ，化简， $8A=19B+5$ ，因为 A, B 均为 1~9 的数字，
 我们依次尝试 $B=1,2,3,4,5$ 即可。只有当 $B=1$ 时， $A=3$ 为整数。因此 Jack 的年龄
 是 31 岁，Bill 的年龄是 13 岁，相差 18 岁，选 B。

Problem 18

考点：平面几何

解答：



过 F 作 $FG \perp AC$ 于 G, $FH \perp CE$ 于 H。 $\frac{FG}{CE} = \frac{AF}{AE}$ ，即 $\frac{FG}{16} = \frac{15}{20}$ ，解得， $FG=12$ 。

那么 $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AB \times FG = \frac{1}{2} \times 3 \times 12 = 18$ 。同理， $\frac{FH}{AC} = \frac{EF}{AE}$ ，即 $\frac{FH}{12} = \frac{5}{20}$ ，解得，

$FH=3$ ，因此 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} DE \times FH = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18$ ，而又因为

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \times CD = \frac{1}{2} \times 9 \times 4 = 18$ ， $S_{\triangle MEC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96$ ，所以

$S_{\triangle BFD} = 96 - 18 - 18 - 18 = 42$ ，所以 $\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{42}{96} = \frac{7}{16}$ ，选 E。

Problem 19

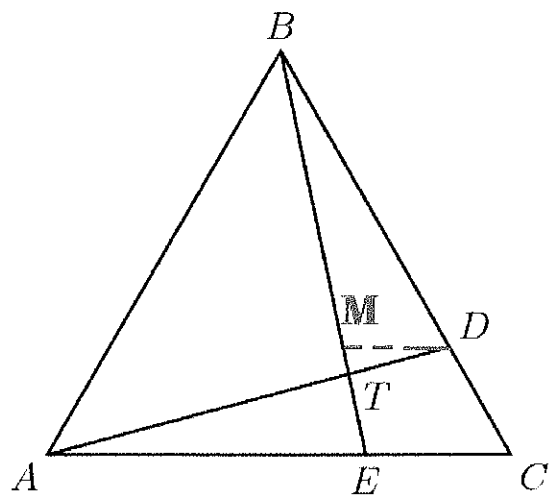
考点：数列

解答：先根据规则写出前几项看是否有什么规律：2001, 2002, 2003, 2000, 2005, 1998, 2007, 1996, 2009, 1994, 2011, 1992, 2013, 1990, ... 可以看到，奇数项是 2001 为首项，公差为 2 的等差数列 a_n ，偶数项是 2002 为首项，公差为 -2 的等差数列 b_n 。因此原数列的第 2004 项即为偶数项数列 b_n 的第 1002 项，即 $b_{1002} = 2002 + (1002 - 1)(-2) = 0$ ，选 C。

Problem 20

考点：平面几何

解答：



过 D 作 $DM \parallel AC$ 交 BE 于 M。则 $\frac{TM}{TE} = \frac{DT}{AT} = \frac{1}{3}$ ，设 $TM = k$, $TE = 3k$ ，因为 $BT = 4 \cdot ET$ ，所以 $BM + k = 4 \cdot 3k$ ， $BM = 11k$ ，那么 $\frac{CD}{BD} = \frac{EM}{MB} = \frac{3k + k}{11k} = \frac{4}{11}$ ，选 D。

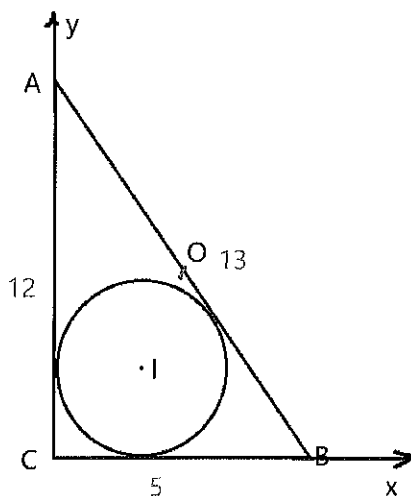
Problem 21

考点：代数（等差数列）+ 数论（解线性不定方程）

解答：我们首先要知道，2个数列各自前2004项，共4008项中，有多少个相等的数。第一个等差数列的通项公式为： $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$ ；第二个等差数列的通项公式为： $b_k = 9 + (k-1) \cdot 7 = 7k + 2$ ；令 $a_n = b_k$ ，则 $3n - 2 = 7k + 2$ ，即 $3n - 7k = 4$ ，两边模3得， $-7k \equiv 1(\text{mod } 3)$ ， $-k \equiv 1(\text{mod } 3)$ ， $k \equiv -1 \equiv 2(\text{mod } 3)$ ，那么 $k = 2 + 3m$ ，代入 $3n - 7k = 4$ ，求得， $n = 6 + 7m$ 。因为 $\begin{cases} 1 \leq k = 2 + 3m \leq 2004 \\ 1 \leq n = 6 + 7m \leq 2004 \end{cases}$ ，考虑到 m 只能取非负整数，解得， $0 \leq m \leq 285$ ， m 一共可以取286个值，而每个 m 对应一对 (k, n) ，因此共有286对 (k, n) 使得 $a_n = b_k$ 。因此不同的数共有 $4008 - 286 = 3722$ 个，选A。

Problem 22

考点：平面几何（内心，内切圆半径公式，距离公式）



关键思路解析：圆心是孤立的点，要求圆心的距离，或者圆心所组成多边形的面积，特别是当有直角三角形存在时，通常采用建系.以直角顶点C为原点，建立直角坐标系如图.因为外心(circumcenter)O为AB的中点，所以 $O(5/2, 6)$.内心(incenter)跟内切圆半径有关，只需要内切圆半径公式求得.2个点坐标有了，那么用距离公式(distance formula)就能求出IO的长度.

解答：下面求内切圆半径： $r = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)} = \frac{30}{15} = 2$. 所以 $I(2,2)$. 又 $O(5/2,6)$,

由距离公式： $IO = \sqrt{(\frac{5}{2}-2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$, 选 D.

Problem 23

考虑：概率（分类讨论）

解答：因为每个面的颜色均有 2 种，因此立方体总共有 $2^6 = 64$ 种涂色方法。要实现题中放法，我们根据立方体中同色的面的个数进行分类讨论。

①若立方体的 6 个面均同色，则可以实现这样的放法。可能全红或全蓝，所以有 2 种情况。

②若立方体的 5 个面均同色，也可以实现这样的放法。不同色的那个面的位置有 6 种，且颜色有 2 种选择，所以有 $6 \times 2 = 12$ 种情况。剩下的 5 个面只有 1 种情况。

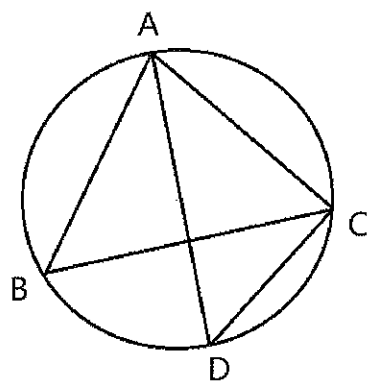
③若立方体的 4 个面均同色，也可以实现这样的放法。则剩下两个面为另一种颜色，且这两个面一定是对面。这两个面的位置可能是上下，前后或左右，共 3 种，而颜色有 2 种不同的选择，因此这两个面共有 $3 \times 2 = 6$ 种情况。剩下的 4 个面只有 1 种情况。

综上，符合要求的涂色方法有 $2+12+6=20$ 种，因此概率为 $P = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$, 选 B.

Problem 24

考点：平面几何（托勒密定理）

解答：



解答：设 $\overline{BD}$ 长度为 x ，因为 AD 平分 $\angle BAC$ ，则 $\angle BAD = \angle DAC$ ，所以 $\overline{CD} = \overline{BD} = x$ 。由托勒密定理， $7x + 8x = 9(AD)$ ，因此 $\frac{AD}{CD} = \frac{AD}{x} = \frac{5}{3}$ ，选 B.

Problem 25

考点：平面几何

解答：

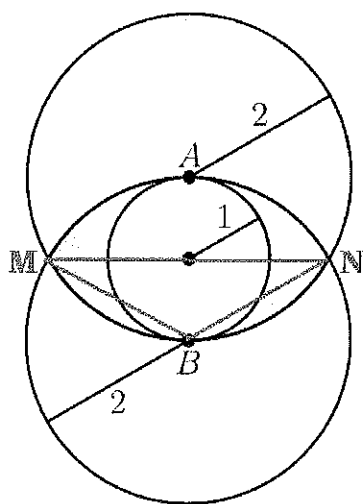


图1

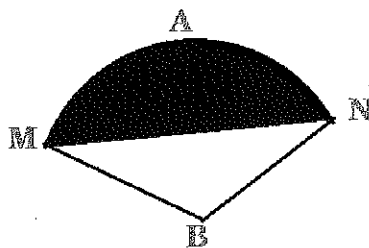


图2

我们只需要将由两端圆弧 MAN 和 MBN 所围成的图像的面积 S_1 ，减去小圆面积 S_2 ，即为阴影部分面积。而 S_1 的面积是图 2 中阴影部分面积 S_3 （即月牙形 MAN 面积）的 2 倍。而 S_3 可由扇形 $BMAN$ 的面积 S_4 和 $\triangle BMN$ 的面积 S_5 相减而得。下面求解 S_4 和 S_5 即可。

因为 $MA = AB = MB = 2$ ，所以 $\triangle MAB$ 为等边三角形， $\angle MBA = 60^\circ$ ，则

$$\angle MBN = 120^\circ, \text{ 所以 } S_4 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 = \frac{4}{3}\pi,$$

$$S_5 = \frac{1}{2}BM \cdot BN \cdot \sin \angle MBN = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{3}, \text{ 那么 } S_3 = S_4 - S_5 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$, S_1 = 2S_3 = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}, \text{ 而 } S_2 = \pi \cdot 1^2 = \pi, \text{ 所以题目要求的阴影部分的面积是}$$

$$S = S_1 - S_2 = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} - \pi = \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}, \text{ 选 B.}$$