

2005 AMC10A 解答

Problem 1

考点：百分数

解答：令 m 为 Mike 的账单， j 为 Joe 的账单.那么

$$\frac{10}{100}m = 2$$

$$m = 20$$

$$\frac{20}{100}j = 2$$

$$j = 10$$

所以他们的账单相差 $m - j = 20 - 10 = 10 \Rightarrow \boxed{(D) 10}$ 美元。

Problem 2

考点：算术

解答：

$$((1 \star 2) \star 3) = \left(\left(\frac{1+2}{1-2} \right) \star 3 \right) = (-3 \star 3) = \frac{-3+3}{-3-3} = 0 \Rightarrow \boxed{(C) 0}$$

Problem 3

考点：代数（解线性方程）

解答：

$$2x + 7 = 3 \Rightarrow x = -2, \quad -2b - 10 = -2 \Rightarrow -2b = 8 \Rightarrow b = \boxed{(B) -4}$$

Problem 4

考点：平面几何（勾股定理）

解答: 假设宽为 y , 则长为 $2y$, 根据勾股定理, 则 $[y^2 + (2y)^2] = x^2$, 解得, $y^2 = \frac{x^2}{5}$ 。

那么长方形的面积是 $S = y \cdot 2y = 2y^2 = \frac{2x^2}{5}$, 选 B.

Problem 5

考点: 算术

解答: 若他们分开买, 则 Dave 需要买 6 扇窗户, 价格 600 美元, 而 Doug 需要买 7 扇, 价格为 700 美元, 因此两个人总共花费 1300 美元; 而如果两人一起买, 因为总共需要 15 扇, 而实际只需要购买 12 扇, 花费 1200 美元, 节省了 100 美元, 选 A。

Problem 6

考点: 数据分析 (平均值)

解答: 20 个数的总和为 $30 \times 20 = 600$, 其他 30 个数的总和是 $20 \times 30 = 600$, 因此这所有 50 个数的总和是 $600 + 600 = 1200$, 那么这 50 个数的平均值是 $1200 \div 50 = 24$, 选 B.

Problem 7

考点: 代数 (应用题)

解答: 假设 Mike 的速度是 v , 所花时间是 t , 则 Mike 所行驶的路程是 vt , 而 Josh 所行驶的路程是 $\frac{4}{5}v \times 2t = \frac{8}{5}vt$, 是 Mike 的 $\frac{8}{5}$, 或者说, 他俩的路程之比是 8:5。而两人所行驶的总路程是 13 英里, 因此 Mike 行驶了 $13 \times \frac{5}{13} = 5$ 英里, 选 B.

Problem 8

考点：平面几何

解答：在直角 $\triangle BFC$ 中，因为 $BC = \sqrt{50}$ ， $BE = 1$ ，所以 $CE = 7$ 。下面证明

$\triangle DFC \cong \triangle CEB$ ：因为 $\angle FDC$ 和 $\angle BCE$ 均为 $\angle DCE$ 的余角，因此 $\angle FDC = \angle BCE$ 。

又 $\angle DFC = \angle BEC = 90^\circ$ ，且 $CD = BC$ ，所以 $\triangle DFC \cong \triangle CEB$ 。因此 $CF = BE = 1$ ，那

么 $EF = EC - FC = 7 - 1 = 6$ ，内部正方形边长为6，面积为36，选C。

Problem 9

考点：排列组合（带有重复的排列）+概率

解答：因为有3块都标有X，2块都标有O（标有相同字母的瓷砖不加以区分），

因此将它们排成一排，这是个带有重复的排列模型，总的方法数是 $\frac{5!}{3!2!} = 10$ 个。

而排列是XOXOX的只有1种，因此概率为 $\frac{1}{10}$ ，选B。

Problem 10

考点：代数（二次方程+韦达定理）

解答：因为方程 $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ 只有1个解，因此判别式

$\Delta = (a+8)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0$ ，化简得， $a^2 + 16a - 80 = 0$ ，此方程的两个根之和为-16，

选A。

Problem 11

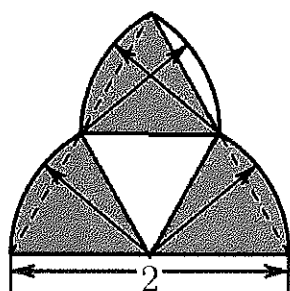
考点：立体几何

解答：每个单位正方体有6个面，所以 n^3 个单位正方体共 $6n^3$ 个面。而大的正方体的一个面上有 n^2 个单位正方体的面，因此共有 $6n^2$ 个单位正方体的面是红色，那么 $6n^2 = \frac{1}{4} \times 6n^3$ ，解得 $n=4$ ，选B.

Problem 12

考点：平面几何

解答：



因为底边为2，所以等边三角形边长为1，也为图中扇形的半径。如上图所示，阴影部分为3个半径为1，圆心角为 60° 的扇形，而剩下的白色部分（一个月牙形，一个等边三角形）也恰好可以拼成一个同样的扇形。因此三叶形的面积等于4倍的扇形的面积。而一个扇形的面积是 $S_1 = \frac{1}{6}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6}$ ，所以三叶形面积为 $S = 4S_1 = \frac{2\pi}{3}$ ，选B.

Problem 13

考点：代数（不等式）

解答：因为 $(130n)^{50} > n^{100}$ ，所以， $n^{50} < 130^{50}$ ， $n < 130$ 。又因为 $n^{100} > 2^{200}$ ， $n > 2^2 = 4$ ，所以 $4 < n < 130$ ，则 $n=5, 6, 7, \dots, 129$ ，共125个，选E.

Problem 14

考点：排列组合

解答：令第1, 第2和第3位数字分别是 A, B, C ，因此 $B = \frac{A+C}{2}$ 。为了使得 B 是个整数， C 和 A 的奇偶性必须相同。 A 可以取1到9共9个数字，而不管 A 为奇数还是偶数， C 均有5种可能性。而 $B = \frac{A+C}{2}$ 由 A 和 C 唯一确定。因此总的可能性是 $9 \cdot 5 \cdot 1 = 45 \implies E$ 。

Problem 15

考点：数论（立方因子个数，因子个数定理）

解答：

$$\begin{aligned} 3! \cdot 5! \cdot 7! &= (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \\ &= (2^2 \times 3)^3 \times 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \end{aligned}$$

因为 $(2^2 \times 3)$ 有 $(2+1)(1+1) = 6$ 个因子，所以共有6个这样的立方数，选E。

Problem 16

考点：数论（不定方程或模运算）

解答：假设这个两位数是 $10A+B$ ，则 $10A+B-(A+B) \equiv 6 \pmod{10}$ ， $9A \equiv 6 \pmod{10}$ ，因为3和10互质，则 $3A \equiv 2 \pmod{10}$ ， $A \equiv 4 \pmod{10}$ ，因此 $A=4$ ，而 $B=0,1,2,\dots,9$ ，所以共10个这样的两位数：40,41,42,43, ..., 49，选D。

Problem 17

考点：代数（等差数列的性质）

解答：因为线段 AB, BC, CD, DE 和 EA 的两端数字之和形成一个等差数列 (不一定按此顺序)，那么这 5 项之和一定是中间项的 5 倍。假设中间项为 x ，而这 5 项之和恰为 $2(A+B+C+D+E) = 2(3+5+6+7+9) = 60$ ，所以 $60 = 5x$ ，则 $x = 12$ ，选 D。

Problem 18

考点：概率 (条件概率)

解答：这是个条件概率。我们用 $P(B_1)$ ， $P(B_2)$ ， $P(A_s)$ 分别表示 B 赢得第一场比赛，B 赢得第二场比赛，A 赢得比赛的概率。则

$$P(B_1 | B_2, A_s) = \frac{P(B_1, B_2, A_s)}{P(B_2, A_s)}$$

若 B 赢得第一场和第二场比赛，同时 A 赢得整个系列赛，则只有 1 种情况：B

赢得前 2 场，A 赢得后三场，即 BBAAA，那么 $P(B_1, B_2, A_s) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ 。

而 B 赢得第 2 场，A 赢得整个系列赛的结果有 4 种情况：BBAAA, ABAA, ABABA,

ABBA，它们的概率分别为 $\left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ，因此，

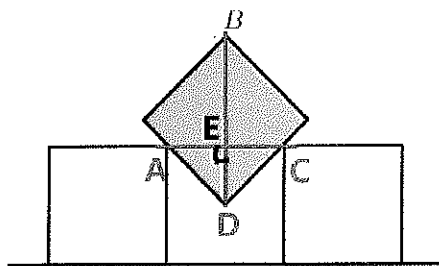
$$P(B_2, A_s) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}。所以$$

$$P(B_1 | B_2, A_s) = \frac{P(B_1, B_2, A_s)}{P(B_2, A_s)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{5}{32}} = \frac{1}{5}，选 A。$$

Problem 19

考点：平面几何

解答：

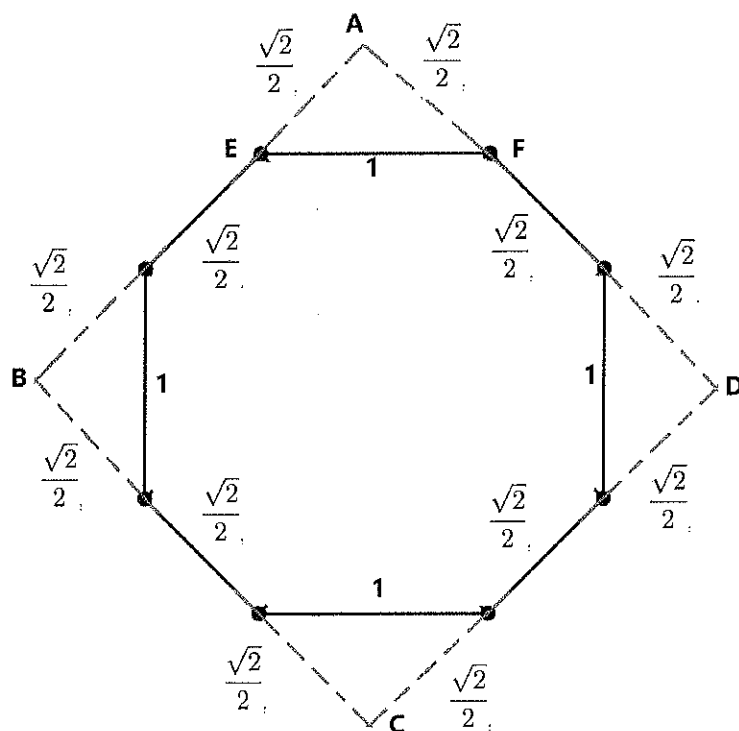


如上图所示, 连接 AC , BD 交于 E , 则 $AC \perp BD$ 。因为在等腰直角三角形 ACD 中, $AC=1$, 所以 $AE=\frac{1}{2}, DE=\frac{1}{2}$ 。而对角线 $BD=\sqrt{2}$, 所以 $BE=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$, 又因为 E 点距离底边为 1 , 因此 B 点距离底边为 $BE+1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}+1=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$, 选 D 。

Problem 20

考点: 平面几何

解答:



$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

作出八边形所有长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的边所在的直线，并交于图示 A, B, C 和 D 点。因

为等角八边形每个外角均为 $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ ，因此 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ，图中

的 4 个三角形均为等腰直角三角形，且直角边长度均为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。因此四边形 ABCD

是个边长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 的正方形。那么八边形面积

$$\text{为: } S = S_{ABCD} - 4S_{\triangle AEF} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{2}, \text{选 A.}$$

Problem 21

考点：数论（整除）

解答：题目要求 $\frac{6n}{1+2+\dots+n}$ 是个整数，即 $k = \frac{6n}{1+2+\dots+n} = \frac{6n}{\frac{(n+1)n}{2}} = \frac{12}{n+1}$ ，因为

$n+1 \geq 2$ ，因此只要求 $n+1$ 为 12 的不小于 2 的所有因子，即 $n+1 = 2, 3, 4, 6, 12$ ，

$n = 1, 2, 3, 5, 11$ 共 5 个，选 B.

Problem 22

考点：数论（倍数）

解答：S 中最大的元素是 4×2005 ，T 中最大的元素是 6×2005 。S 和 T 公共的元

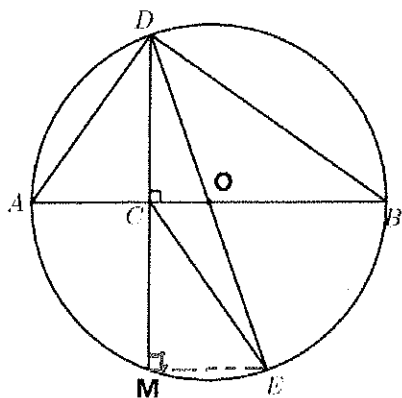
素是 4 和 6 的公倍数，即 12 的倍数，因此我们只要求不超过 4×2005 的正整数中，

12 的倍数的个数，为 $\left\lfloor \frac{4 \times 2005}{12} \right\rfloor = 668$ 个，选 D.

Problem 23

考点：平面几何（相似三角形）

解答:



因为 DE 为直径, 所以 $ME \perp DM$ 。如果把 CD 看成 $\triangle DCE$ 和 $\triangle ABD$ 的底,

则 $S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} \times DC \times ME$, $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times DC \times AB$, 那么 $\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ADB}} = \frac{ME}{AB}$ 。若设圆直径是 3,

即 $AB=3$, 接着只要求出 ME 长度即可。则 $BC=2$, $AC=1$, 因为 $AO=1.5$, 所以 $CO=0.5$ 。

因为 CO 是 $\triangle DME$ 的中位线(midsegment), 则 $ME=2CO=1$, 所以得到,

$$\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ADB}} = \frac{ME}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Answer: C

Problem 24

考点: 数论 (不定方程, 质数)

解答: 因为 $P(n) = \sqrt{n}$, 则 $n = p_1^2$, 这里 p_1 表示一个质数。

因为 $P(n+48) = \sqrt{n+48}$, 则 $n+48 = p_2^2$, 这里 p_2 是另外一个不同的质数。

因此有:

$$p_2^2 = n + 48$$

$$p_1^2 = n$$

$$p_2^2 - p_1^2 = 48$$

$$(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = 48$$

因为 $p_1 > 0$, 则 $(p_2 + p_1) > (p_2 - p_1)$ 。

上述是一个不定方程。意味着需要把 48 分解成一大一小两个正整数相乘的形式。

所以 $(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = 48 \cdot 1 = 24 \cdot 2 = 16 \cdot 3 = 12 \cdot 4 = 8 \cdot 6$ 。因此下面分类讨论：

①

$$(p_2 + p_1) = 48$$

$$(p_2 - p_1) = 1$$

$$p_1 = \frac{47}{2}$$

$$p_2 = \frac{49}{2}$$

p_2, p_1 均不是质数，舍去。

②

$$(p_2 + p_1) = 24$$

$$(p_2 - p_1) = 2$$

$$p_1 = 11$$

$$p_2 = 13$$

此时 $n = p_1^2 = 121$ 符合题意。

③

$$(p_2 + p_1) = 16$$

$$(p_2 - p_1) = 3$$

$$p_1 = \frac{13}{2}$$

$$p_2 = \frac{19}{2}$$

p_2, p_1 均不是质数，舍去。

④

$$(p_2 + p_1) = 12$$

$$(p_2 - p_1) = 4$$

$$p_1 = 4$$

$$p_2 = 8$$

p_2, p_1 均不是质数，舍去。

⑤

$$(p_2 + p_1) = 8$$

$$(p_2 - p_1) = 6$$

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = 7$$

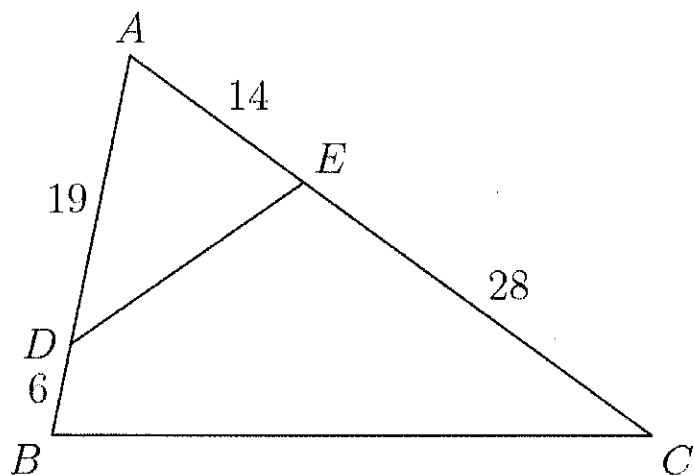
$p_1 = 1$ 不是质数，舍去。

综上，只有 $n = 121$ 符合题意。选 B。

Problem 25

考点：平面几何（三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$ ）

解答：



因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 42 \cdot \sin A = 25 \cdot 21 \cdot \sin A$,

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 14 \cdot \sin A = 19 \cdot 7 \cdot \sin A$ 。所以

$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{19 \cdot 7 \cdot \sin A}{25 \cdot 21 \cdot \sin A} = \frac{19}{75}$ ，所以 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BDEC}} = \frac{19}{56}$ ，选 D。