

## 2005 AMC10B 解答

### Problem 1

考点：算术

解答：买入时，5 个糖果 2 美元，则一个糖果  $\frac{2}{5}$  美元。卖出时，2 个糖果 1 美元，则 1 个糖果  $\frac{1}{2}$ 。那么一个糖果的利润是  $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$  美元。而一共卖出 1000 个，总利润是 100 美元，选 A。

### Problem 2

考点：百分数

解答：由题意， $0.01x \cdot x = 4$ ，则

$$0.01x \cdot x = 4 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \boxed{(D) 20}.$$

### Problem 3

考点：比例

解答：  $1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ ，选 D。

### Problem 4

考点：算术

解答：

$$\begin{aligned}
 & (5 \diamond 12) \diamond ((-12) \diamond (-5)) \\
 &= (\sqrt{5^2 + 12^2}) \diamond (\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}) \\
 &= (\sqrt{169}) \diamond (\sqrt{169}) \\
 &= 13 \diamond 13 \\
 &= \sqrt{13^2 + 13^2} \\
 &= \sqrt{338} \\
 & \boxed{(D) 13\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

### Problem 5

考点：比例

解答：假设所剩的钱占原来总额的比例是  $x$ ，则  $\frac{1}{\frac{5}{1-\frac{1}{3}}} = \frac{1-x}{1}$ ，解得， $x = \frac{2}{5}$ ，选 C.

### Problem 6

考点：代数（不等式）

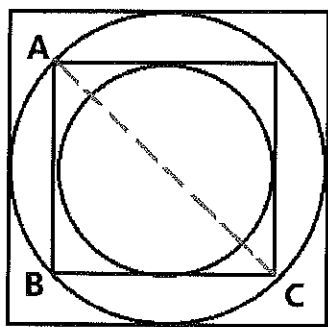
解答：假设剩下的测验中，允许  $x$  次获得低于 A 的分数。那么  $\frac{22 + (20 - x)}{50} \geq 80\%$ ,

所以  $42 - x \geq 40, x \leq 2$ ，因此最多允许 2 次测试成绩低于 A，选 B.

### Problem 7

考点：平面几何

解答：



设小圆半径为 1, 则小圆直径为 2, 即  $AB=2$ . 在等腰直角  $\triangle ABC$  中,  $AC=2\sqrt{2}$ .

此为较大圆的直径, 也为较大正方形的边长. 所以较大正方形的面积是

$AC^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$ . 所以较小圆的面积和较大正方形的面积之比为  $\frac{\pi}{8}$ , 选 B.

#### Problem 8

考点: 平面几何

解答: 每块瓷砖上阴影部分的面积是  $s = 1 \times 1 - \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$ , 而铺整块地板需

要 80 块瓷砖, 所以阴影部分的总面积是  $80s = 80\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 80 - 20\pi$ , 选 A.

#### Problem 9

考点: 概率

解答: 和为奇数, 那么两个数必定一奇一偶. 下面分类讨论.

①若第一个骰子得到奇数 (概率为  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ), 同时第二个骰子得到偶数 (概率是  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ), 则概率为  $P_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ .

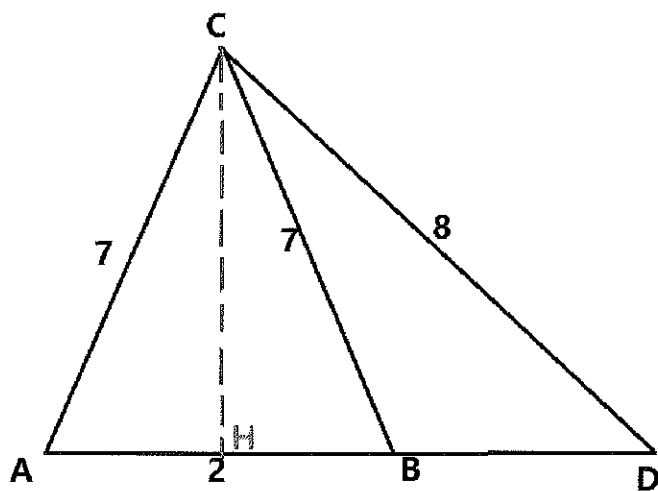
②若第一个骰子得到偶数 (概率为  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ), 同时第二个骰子得到奇数 (概率是  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ), 则概率为  $P_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ .

综上, 和为奇数的总概率为  $P = P_1 + P_2 = \frac{5}{9}$ , 选 D.

#### Problem 10

考点: 平面几何

解答:



过  $C$  作  $CH \perp AD$ . 则  $H$  为  $AB$  的中点,  $AH=1$ . 在直角  $\triangle ACH$  中, 由勾股定理,  $CH^2 = 48$ . 在直角  $\triangle CHD$  中, 再由勾股定理,  $HD = \sqrt{64 - 48} = 4$ , 所以  $BD = HD - HB = 4 - 1 = 3$ . , 选 A.

#### Problem 11

考点: 数列 (周期数列)

解答: 我们先计算前几项看是否有周期性。

$a_1 = 2005, a_2 = 133, a_3 = 55, a_4 = 250, a_5 = 133, a_6 = 55, a_7 = 250, \dots$ , 可以看到, 从第 2 项开始, 每 3 项一次循环, 周期为 3. 因为  $2005 - 1 = 2004 \equiv 0 \pmod{3}$ , 因此

$a_{2005} = a_4 = 250$ , 选 E.

#### Problem 12

考点: 概率

解答: 因为 12 个数乘积为质数, 则其中一个为质数, 另外 11 个均是 1. 首先从 12 个骰子里选择一个骰子使它的数为质数, 共 12 种方法. 这个数是质数的概率

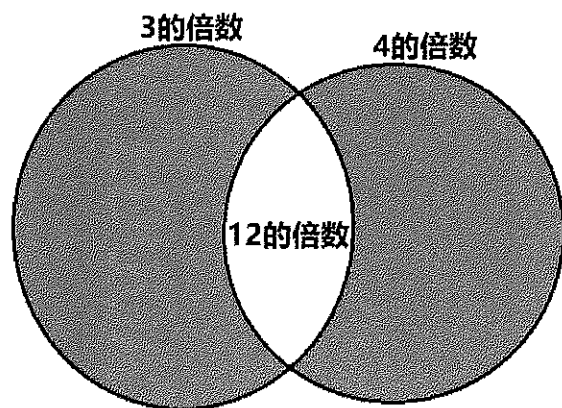
是  $\frac{1}{2}$  (因为 1 到 6 中只有 2, 3, 5 是质数), 其他 11 个数均为 1 的概率是  $\left(\frac{1}{6}\right)^{11}$ 。因此

概率是  $P = 12 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{11} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ , 选 E.

### Problem 13

考点: 数论 (倍数) + 容斥原理 (或文氏图)

解答:



由以上文氏图可以看到, 我们要计算的是阴影部分的元素个数, 即先求 3 的倍数的个数和 4 的倍数的个数之和, 再减去 12 的倍数的个数的 2 倍即可。

1-2005 中是 3 的整数倍的数的个数是  $\left\lfloor \frac{2005}{3} \right\rfloor = 668$  个, 是 4 的整数倍的数的个数

是  $\left\lfloor \frac{2005}{4} \right\rfloor = 501$  个, 同时是 3 和 4 的倍数, 即 12 的倍数的数的个数是  $\left\lfloor \frac{2005}{12} \right\rfloor = 167$

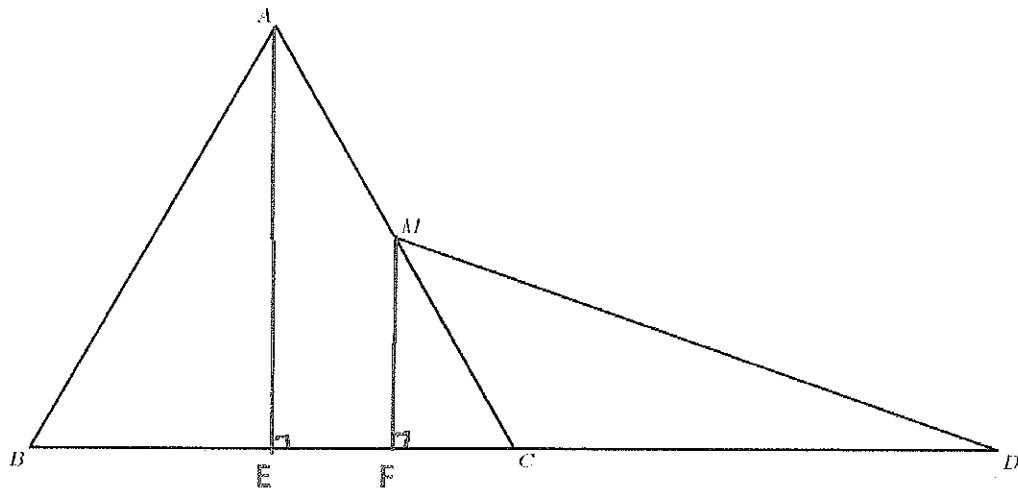
个。因此是 3 或 4 的倍数但不是 12 的倍数的数的个数是  $668 + 501 - 167 \times 2 = 835$  个,

选 C.

### Problem 14

考点：平面几何

解答：



过 A 和 M 分别作  $AE \perp BC$ ,  $MF \perp BC$ 。因为  $\triangle ABC$  为边长是 2 的等边三角形，

所以  $\angle BAE = 30^\circ$ ，因为  $AB = 2$ ，所以  $AE = \sqrt{3}$ ， $MF = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，因此

$$S_{\triangle CDM} = \frac{1}{2}CD \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 选 C.}$$

### Problem 15

考点：概率(分类讨论)

解答：从 8 张里随机抽取 2 张，一共有  $C_8^2 = 28$  种可能性。下面分类讨论总额大于或等于 20 美元的可能性。

①若这 2 张钞票中含有 2 张 20 元：1 种方法。

②若这 2 张钞票中只有 1 张 20 元，首先从 2 张 20 元中选择 1 张，有 2 种方法；然后剩下一张从 1 元，5 元或 10 元里随便挑一张均可，有 6 种方法。共  $2 \times 6 = 12$  种方法。

③若这2张钞票中没有20元钞票，那么只可能是2张10元：1种方法。

综上，总共有14种情况符合题意。因此概率是  $P = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$ ，选D。

#### Problem 16,

考点：多项式（韦达定理）

解答：假设  $x^2 + mx + n = 0$  的两个根是  $2r, 2s$ ，则方程  $x^2 + px + m = 0$  的两个根是  $r, s$ 。由韦达定理， $2r + 2s = -m, 4rs = n$ ；且  $r + s = -p, rs = m$ 。因此

$-2(r + s) = m = rs$ ，即  $\frac{rs}{r + s} = -2$ 。所以  $\frac{n}{p} = \frac{-4rs}{(r + s)} = 8$ ，选D。

#### Problem 17

考点：代数（幂运算）

解答：因为  $4^a = 5$ ，两边  $b$  次方， $(4^a)^b = 5^b = 6$ ，再两边  $c$  次方， $((4^a)^b)^c = 6^c = 7$ ，

即  $4^{abc} = 7$ ，接着两边  $d$  次方， $4^{abcd} = 7^d = 8$ ，即  $2^{2abcd} = 2^3$ ，那么  $2abcd = 3, abcd = \frac{3}{2}$ ，

选B。

#### Problem 18

考点：排列组合

解答：因为  $a, b, c, d, e, f$ ，和  $g$  是从2到9中所选取的7个不同的数字，所以我们首先从2到9这8个数字中选择7个数字，共  $C_8^7 = 8$  种方法。然后将这7个数字按照从小到大排列后，分别给  $a, b, c, d, e, f$ ，和  $g$ ，只有1种方法。因此共8种方法，选D。

### Problem 19

**考点：数据分析（平均值和中位数）**

**解答：**假设共有 100 个学生，则有 10 个 70 分，25 个 80 分，20 个 85 分，15 个 90 分，30 个 95 分。中位数是把这些分数从小到大排列后，处于第 50 和第 51 个学生成绩的平均值，而第 50 个和第 51 个学生均得到 85 分，平均值为 85 分，此即为中位数。平均值为  $\frac{70 \times 10 + 80 \times 25 + 85 \times 20 + 90 \times 15 + 95 \times 30}{100} = 86$  分，差为  $86 - 85 = 1$  分，选 B。

### Problem 20

**考点：排列组合**

**解答：**假设组成的 5 位数是 ABCDE。我们先观察数字 A，它可能取 1, 3, 5, 7, 和 8 中任何一个，共 5 种可能性。若  $A=1$ ，则以 1 开头的五位数共有  $4! = 24$  种（其实是 3, 5, 7, 8 在后四位的排列数）。当  $A=3, 5, 7$ ，或 8 时，也是类似。因此把这些所有五位数的最高位相加，再乘以最高位的位值，得到

$$(1+3+5+7+8) \cdot 24 \cdot 10000 = 24^2 \cdot 10000。$$

类似的，把所有五位数的其他位上数字相加，再乘以各自的位值，结果分别是：

$$24^2 \cdot 1000, 24^2 \cdot 100, 24^2 \cdot 10, 24^2 \cdot 1，因此所有这些五位数之和为：$$

$$24^2(10000+1000+100+10+1) = 24^2 \cdot 11111。所有这些五位数共有  $5! = 120$  个，因此$$

$$\text{它们的平均值是 } \frac{24^2 \cdot 11111}{120} = 53332.8，\text{选 C。}$$

### Problem 21

考点：概率（基本公式）+排列组合

解答：从 40 张纸条里选择 4 张，总共有  $C_{40}^4$  种可能性。4 张纸条上数字都相同的可能情况是：4 张都是 1，或 4 张都是 2，...，或 4 张都是 10，共 10 种可能性。

因此  $p = \frac{10}{C_{40}^4}$ 。要使得其中两张纸条上都是数字  $a$ ，另外两张纸条上都是数字  $b \neq a$ ，

那么我们先确定数字  $a$  和  $b \neq a$ ，即从 1 到 10 种选择 2 个不同的数字，共  $C_{10}^2 = 45$

种可能性。如， $a=1, b=2$ ，则再从 4 张标有 1 的纸条里选 2 张，有  $C_4^2 = 6$  种方

法；同样，从 4 张标有 2 的纸条里选 2 张，也有  $C_4^2 = 6$  种方法。因此  $q = \frac{45 \times 6 \times 6}{C_{40}^4}$ 。

那么  $\frac{q}{p} = \frac{45 \cdot 6 \cdot 6}{10} = 162$ ，选 A。

### Problem 22

考点：数论（整除）

解答：要使得  $k = \frac{n!}{1+2+3+\dots+n} = \frac{n!}{\frac{(1+n)n}{2}} = \frac{2(n-1)!}{n+1}$  是个整数，只需要满足  $n+1$

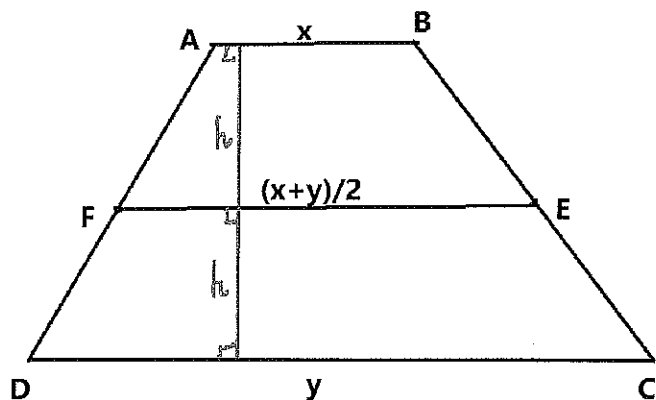
不是个奇质数即可。因此当  $n+1=23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3$  时对应的  $n$  均是不合理的，

共 8 个。那么合理的  $n$  共有  $24-8=16$  个，选 C。

### Problem 23

考点：平面几何

解答：



设  $AB = x, DC = y$ , 因为  $EF$  为梯形的中位线, 则  $EF = \frac{x+y}{2}$ 。因为  $S_{ABEF} = 2S_{FECD}$ ,

$$\text{即 } \frac{(x + \frac{x+y}{2})h}{2} = 2 \times \frac{(\frac{x+y}{2} + y)h}{2}, \text{ 得到, } x/y = 5, \text{ 即 } AB/DC = 5, \text{ 选 C。}$$

#### Problem 24

考点: 数论 (不定方程)

解答: 假设  $x = 10a + b$ , 则  $y = 10b + a$ , 则  $(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = m^2$ , 化简得,  
 $3^2 \times 11 \times (a+b)(a-b) = m^2$ , 因此  $(a+b)(a-b) = 11k^2$ , 其中  $k$  为整数。而  $a, b$  只能  
 取 0~9 的数字, 则  $a+b=11, a-b=1$ ,  $a=6, b=5$ 。那么  $x=65, y=56, m=33$ , 因  
 此  $x+y+m=65+56+33=154$ , 选 E。

#### Problem 25

考点: 排列组合

解答: 和为 125 的元素对有:  $\{25, 100\}, \{26, 99\}, \{27, 98\}, \{28, 97\}, \dots, \{62, 63\}$ , 共 38  
 对。B 最多包含这些每一对元素中其中一个元素, 共 38 个。另外, B 还可以包  
 含 1 到 24 之间 (包括 1 和 24) 的所有整数。因此 B 中最多有  $24+38=62$  个元素,  
 选 C。