

2006 AMC10A 解答

Problem 1

考点：算术

解答：5份三明治需要 $5 \cdot 3 = 15$ 美元，8杯苏打水需要 $8 \cdot 2 = 16$ 美元，因此总共需要支付 $15 + 16 = \boxed{\text{(A)} 31}$ 美元。

Problem 2

考点：算术

解答：由符号 $\otimes$ 的定义，我们有 $h \otimes h = h^3 - h$ 。

那么， $h \otimes (h \otimes h) = h \otimes (h^3 - h) = h^3 - (h^3 - h) = \boxed{\text{(C)} h}$ 。

Problem 3

考点：代数（比例）

解答：假设 Mary 的年龄是 m 岁，则有 $\frac{m}{30} = \frac{3}{5}$ ，解得， $m = \boxed{\text{(B)} 18}$ 。

Problem 4

考点：算术

解答：手表上显示的数字为这种形式：AB:CD。其中 A 能取到的最大值是 1，B 能取到的最大值是 9，但这两者不能同时取到。当 $A=1$ ，则 B 最大为 2， $A+B=3$ ；但当 $B=9$ ， $A=0$ ， $A+B=9$ 。所以 $A+B$ 最大为 9。

C 能取到的最大值是 5，D 能取到的最大值是 9，两者可以同时取到，此时 $C+D=14$ 为最大值。因此 $A+B+C+D$ 的最大值是 $9+14=23$ ，选 E。

Problem 5

考点：算术

解答：一半普通的披萨价格是 4 美元，而一半铺有凤尾鱼的披萨的价格是 6 美元。

因为各自分成 4 片，因此一片普通的披萨片的价格是 1 美元，而一片铺有凤尾鱼

的披萨片的价格是 $6/4=1.5$ 美元。因为 Dave 吃了 4 片凤尾鱼披萨片和一片普通

披萨片，则 Dave 总共支付 $1.5 \times 4 + 1 = 7$ 美元。Doug 总共支付了 $1 \times 3 = 3$ 美元，则

Dave 比 Doug 多付了 4 美元，选 D。

Problem 6

考点：代数（解方程）

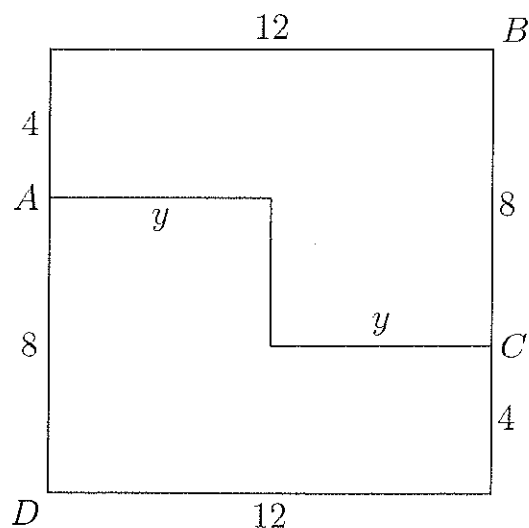
解答：对原方程两边 7 次方，得到 $(7x)^2 = 14x$ ，即 $49x^2 = 14x$ ，因为 x 为非

零，两边除以 x ，得到 $7x = 2$ ，解得， $x = \boxed{(B) \frac{2}{7}}$ 。

Problem 7

考点：平面几何

解答：



这 2 个六边形可以如上图所示拼成一个正方形。我们可以看到, 拼成的正方形边

长为 12, 且 y 为正方形边长的一半, $y = \frac{12}{2} = \boxed{(A) 6}$

Problem 8

考点: 代数 (二次函数)

解答: 将点 $(2, 3)$ 和点 $(4, 3)$ 分别代入抛物线方程, $\begin{cases} 3 = 4 + 2b + c \\ 3 = 16 + 4b + c \end{cases}$, 解得, $\begin{cases} b = -6 \\ c = 11 \end{cases}$,

因此选 E。

Problem 9

考点: 等差数列

解答: 假设集合中最小的正整数是 x , 且共有 n 个元素, 那么最大的元素为 $x + n - 1$,

这些元素之和是 $\frac{(x + x + n - 1)n}{2} = 15$, $(2x + n - 1)n = 30 \times 1 = 15 \times 2 = 10 \times 3 = 6 \times 5$.

而因为 $n \geq 2$, 因此有

$\begin{cases} 2x + n - 1 = 15 \\ n = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x + n - 1 = 10 \\ n = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x + n - 1 = 6 \\ n = 5 \end{cases}$, 解得, $\begin{cases} x = 7 \\ n = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 4 \\ n = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ n = 5 \end{cases}$ 。

因此共有 3 个这样的集合, 选 C。

Problem 10

考点: 数论 (平方数)

解答: 要使得 $\sqrt{120 - \sqrt{x}}$ 是个整数, 则 $120 - \sqrt{x}$ 一定是个完全平方数。因为 $\sqrt{x}$ 是个非负数, 所以 $120 - \sqrt{x} \leq 120$ 。小于等于 120 的完全平方数是

$\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$, 所以 $120 - \sqrt{x}$ 共有 11 个值, 对于其中每一个值, 都能唯一的确定 x , 因此 x 的值共有 (E) 11 个。

Problem 11

考点: 解析几何 (直线方程)

解答: 将方程左边展开, 得到,

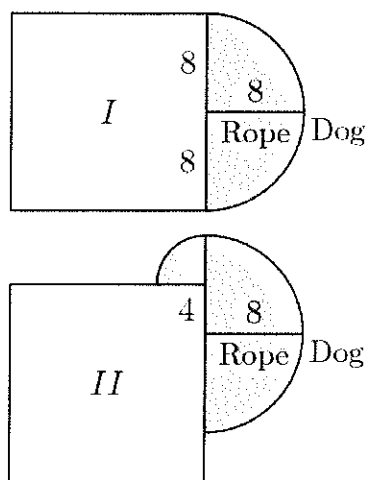
$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 \implies 2xy = 0 \implies xy = 0 \implies x = 0 \text{ or } y = 0,$$

这是两条直线, 分别表示 y 轴和 x 轴。因此选 C。

Problem 12

考点: 平面几何

解答:



如上图, 对于狗的漫游面积, 图 II 比图 I 多了左上角半径为 4 的 $\frac{1}{4}$ 圆, 因此面积

大了 $\frac{\pi \times 4^2}{4} = 4\pi$, 选 C。

Problem 13

考点: 概率

解答: 掷一枚骰子, 得到偶数的概率和得到奇数的概率相等, 均为 $\frac{1}{2}$ 。因此玩家赢的概率是: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ 。假设他赢得 x 美元, 则如果游戏公平, 有 $\frac{1}{12}x = 5$, $x = 60$ 美元, 选 D。

Problem 14

考点: 等差数列

解答: 从顶到底, 环的外径成公差为 -1 的等差数列, $a_n = a_1 + (n-1)d$, 即

$3 = 20 + (n-1)(-1)$, 解得, $n = 18$, 因此底环是第 18 个环。将这所有的环的外径

相加, 再减去 17 处重复计算的两环的厚度 (2 厘米), 即为顶环顶部到底环底

部的距离, $H = 20 + 19 + 18 + \dots + 3 - 2 \times 17 = \frac{23 \times 18}{2} - 34 = 207 - 34 = 173$, 选 B。

Problem 15

考点: 代数

解答: 我们先算出在他们相遇后, 再经过多少分钟相遇。Odell 对应的角速度是

$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{250}{50} = 5 \text{ rad/min}$. 而 Kershaw 的角速度是 $\omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{300}{60} = 5 \text{ rad/min}$. 当他

们相遇时, 他们扫过的圆心角总和为 2π 。设经过 x 分钟相遇, 则 $(5+5)x = 2\pi$,

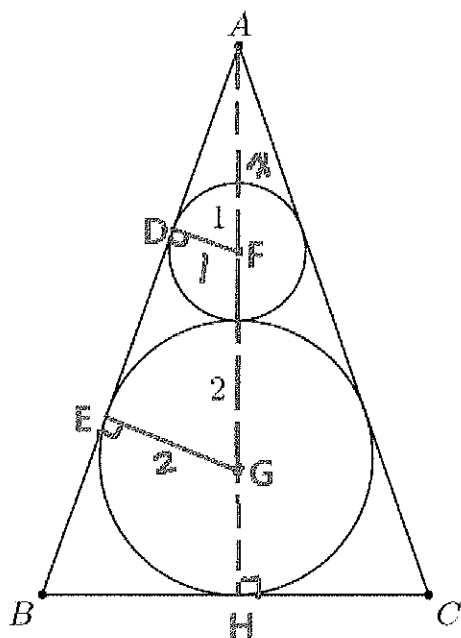
$x = \frac{\pi}{5}$ 分钟。所以每经过 $\frac{\pi}{5}$ 分钟, 他们就会相遇一次, 那么 30 分钟内总共相遇

$$\left\lfloor \frac{30}{\frac{\pi}{5}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{150}{\pi} \right\rfloor \approx 47 \text{ 次, 选 D.}$$

Problem 16

考点:平面几何

解答:

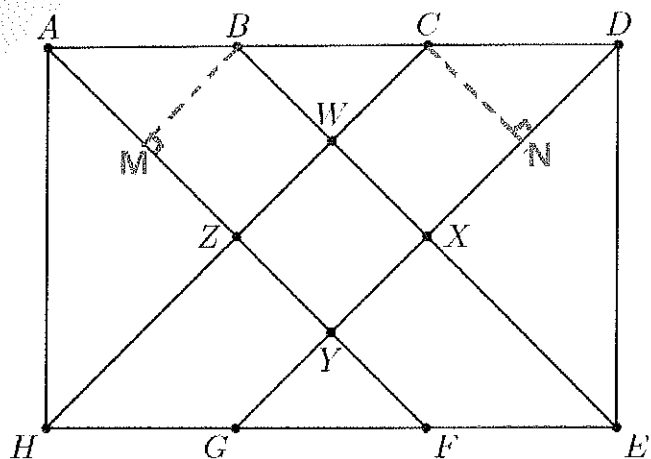


设 $AF=x$, 因为 $\triangle ADF \sim \triangle AEG$, $\frac{AF}{AG} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{x+3} = \frac{1}{2}$, 解得, $x=3$, 那么在直角 $\triangle ADF$ 中, 由勾股定理, $AD = \sqrt{3^2 - 1} = 2\sqrt{2}$ 。因此 $AH = x + 3 + 2 = 8$ 。因为 $\triangle ABH \sim \triangle AFD$, 所以 $\frac{BH}{FD} = \frac{AH}{AD}$, 即 $\frac{BH}{1} = \frac{8}{2\sqrt{2}}$, $BH = 2\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$ 。则 $\triangle ABC$ 的面积是 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 8 = 16\sqrt{2}$ 。选 D。

Problem 17

考点:平面几何

解答:



因为 $AB=EF=1$, 且 $AB \parallel EF$, 所以 $ABEF$ 为平行四边形, 那么 $BE \parallel AF$ 。同理 $CH \parallel DG$ 。因此 $WZYX$ 是平行四边形。因为 $\angle BCW = \angle CBW = 45^\circ$, 因此 $\angle BWC = 90^\circ$, 所以平行四边形 $WZYX$ 是个矩形。过 B 作 $BM \perp AF$, 过 C 作 $CN \perp GD$ 。在等腰直角 $\triangle ABM$ 中, 因为 $AB=1$, 所以 $BM = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 因此 $WZ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。同理, $WX = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 那么正方形 $WZYX$ 的面积是 $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 选 A。

Problem 18

考点: 排列组合(捆绑法)

解答: 先选第一个字母, 有 26 种方法, 再选第二个字母, 也有 26 种方法。然后将这 2 个字母捆绑在一起看成一个整体。接下来是从 5 个位置 (其中 4 个位置放数字, 剩下 1 个位置放字母整体) 里挑选一个位置给字母整体, 有 5 种方法。最后剩下的 4 个位置中, 每个位置分别挑选一个数字, 均有 10 种方法。因此总的方法数是 $26 \times 26 \times 5 \times 10^4$, 选 C。

Problem 19

考点：等差数列，排列组合

解答：假设这3个内角为 $x < y < z$ ，因为成等差数列，所以 $x + z = 2y$ 。即 $180^\circ - y = 2y$ ， $y = 60^\circ$ 。那么 $x + z = 120^\circ$ 。因为 $x < y = 60$ 是正整数，因此这里 $x = 1, 2, 3, \dots, 59$ 共可以取 59 个值。因此共有 59 个这样不相似的三角形，选 C。

Problem 20

考点：数论（余数）+ 概率

解答：两个整数差是 5 的倍数，则表明这两个整数模 5 余数相等。而一个整数模 5 余数只能是 0, 1, 2, 3, 4。因此将 1 到 2006 这些数按照模 5 的余数分成 5 类，而现在选取 6 个不同的正整数，则必定会存在至少一对正整数落在同一类中，而这一对的差是 5 的倍数。因此概率为 1，选 E。

Problem 21

考点：排列组合（考虑反面）

解答：我们考虑反面更简单，即没有一位是数字 2 或 3。最高位只能取 1 到 9 中除了 2 和 3 以外的数字，有 7 种方法。其他 3 位都是取 0~9 中除了 2 和 3 以外的数字，各有 8 种方法，所以共有 7×8^3 种可能性。而 4 位正整数总共有 9×10^3 个，因此符合要求的 4 位正整数共有 $9 \times 10^3 - 7 \times 8^3 = 9000 - 3584 = 5416$ 个，选 E。

Problem 22

考点：数论（不定方程有整数解的充要条件）

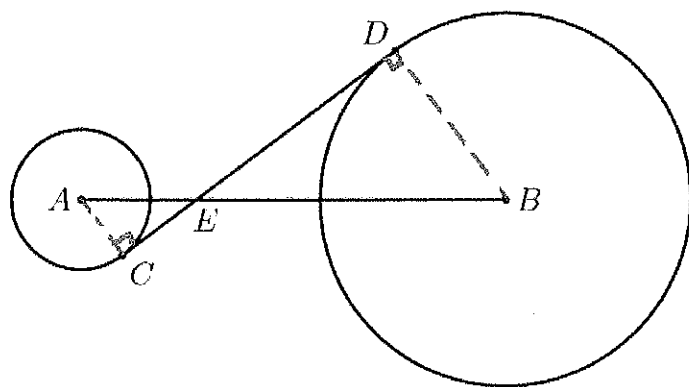
解答：假设一农民欠了 x 美元，用 y 头猪还，找零 z 头羊。则 $300y - 210z = x$ ，这里 x 为常数， y 和 z 为未知数。此不定方程有解的充要条件为

$\gcd(300, 210) = 30 \mid x$, 即 x 为 30 的倍数, x 最小为 30. 而当 $x = 30$ 时, 不定方程变为 $300y - 210z = 30$, 即 $10y - 7z = 1$, 此方程是有整数解的, $y = 5, z = 7$ 是其中一组解. 因此 $x = 30$ 为可以解决的最小正债务, 选 C.

Problem 23

考点: 平面几何

解答:

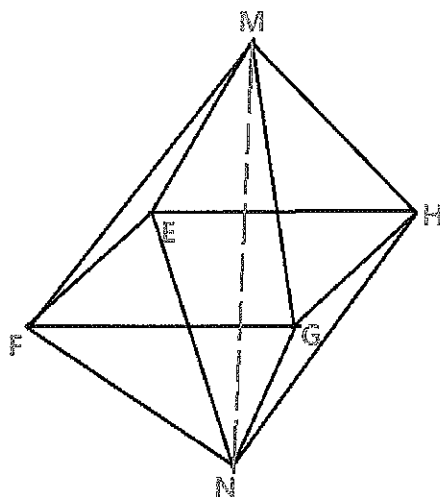
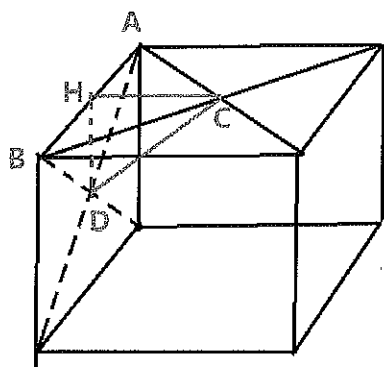


因为直角 $\triangle ACE$ 中, $AC = 3, AE = 5$, 则由勾股定理, $CE = 4$. 因为 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$, 所以 $\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{ED}$, 即 $\frac{3}{8} = \frac{4}{ED}$, 解得, $ED = \frac{32}{3}$. 那么 $CD = CE + DE = 4 + \frac{32}{3} = \frac{44}{3}$, 选 B.

Problem 24

考点: 立体几何

解答:



我们先求八面体的边长。如上图， CD 即为八面体的边长。过 C 作 $CH \perp AB$ ，连

接 DH 。在等腰直角 $\triangle CHD$ 中， $CH = \frac{1}{2}$ ，所以 $CD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。所以右图中，正方形

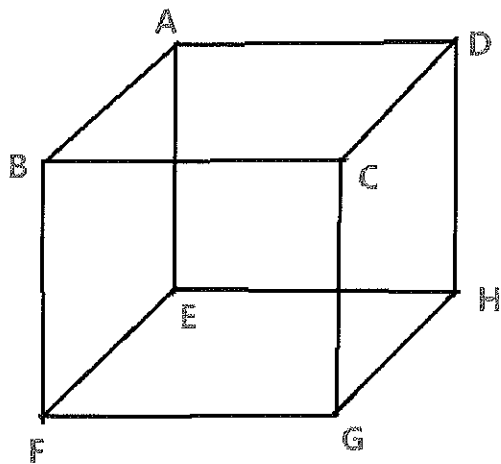
$EFGH$ 的面积为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ，高 MN 为正方形的边长 1，所以八面体的体积为

$$V = \frac{1}{3} S_{EFGH} \cdot MN = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}, \text{ 选 B.}$$

Problem 25

考点: 概率 (分类讨论)

解答:



移动 7 步, 总的路径数一共是 3^7 个。下面找出使得每个顶点都恰好访问一次的路径数。

假设虫子从 B 点开始, 第 1 步可以移到 A、E 或 F, 共 3 种方法。假设移动到 A。从 A 开始, 第 2 步可以移动到 D 或 E, 且这 2 个点地位是等同的 (或者说是对称的)。因此第 2 步有 2 种方法。假设从 A 移动到 D。从 D 开始, 第 3 步可以移到 C 或 H。但由于 C 或 H 这 2 个点地位不等同, 我们接下来需要分类讨论。

①若第 3 步从 D 移到 C。第 4 步只能从 C 移到 G, 1 种方法。第 5 步从 G 移到 F 或 H, 且 F 和 H 地位等同 (位置对称), 因此第 5 步有 2 种方法。假设第 5 步从 G 移到 H, 那么第 6 步只能从 H 移到 E, 1 种方法。第 7 步只能从 E 移到 F, 1 种方法。

②若第 3 步从 D 移到 H。第 4 步只能从 H 移到 E, 1 种方法。(因为若从 H 移到 G。接下来从 G 点移到 F 或 C 后均无法达到题目要求。因为若从 G 移到 C 后, 接下来只能访问已经访问过的点。若从 G 移到 F, 从 F 只能接着访问 E, 之后第 7 步无法访问的 C 点。) 第 5 步只能从 E 移到 F, 第 6 步只能从 F 移到 G, 第 7 步只能从 G 移到 C。因此从第 4 步开始只有 1 种方法。

综上, 符合要求的方法数是 $3 \times 2 \times (1 \times 2 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1) = 18$ 种, 因此概率为

$$P = \frac{18}{3^7} = \frac{2}{243}, \text{ 选 C.}$$