

2006 AMC10B 解答

Problem 1

考点：算术

解答： $(-1+1)+(-1+1)+\dots+(-1+1)=0$ ，选 C。

Problem 2

考点：算术

解答：因为 $x \spadesuit y = (x+y)(x-y)$ ，所以，

$$3 \spadesuit (4 \spadesuit 5) = 3 \spadesuit ((4+5)(4-5)) = 3 \spadesuit (-9) = (3+(-9))(3-(-9)) = \boxed{(A) - 72}$$

Problem 3

考点：算术

解答：设黑豹队得了 x 分，那么美洲狮队得了 $x+14$ 分，则 $x+x+14=34$ ，解得，

$x=10$ ，选 A。

Problem 4

考点：平面几何

解答：小圆面积为 $\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ ，此即为红色区域的面积。而蓝色区域面积等于

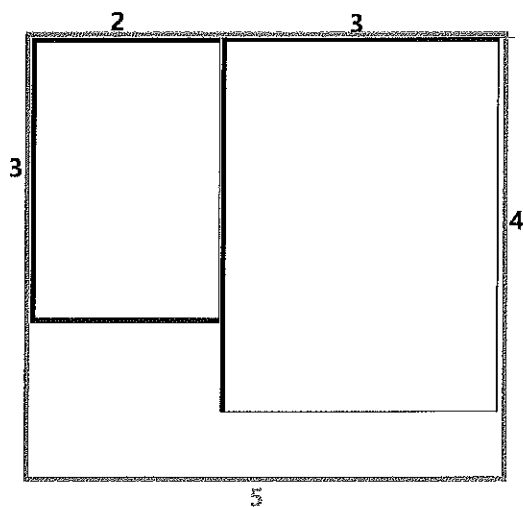
大圆面积减去小圆面积，即 $\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\pi$ 。因此蓝色区域面积与红色区

域面积比值是 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ ，选 D。

Problem 5

考点：平面几何

解答：因为两个矩形的面积之和为 $6+12=18$ ，因此正方形面积至少为 18，排除 A。对于选项 B，表明正方形边长为 5，这样的正方形是合适的，如下图所示。将 3×4 的矩形的长度为 3 的边与 2×3 的矩形的长度为 2 的边放置在一条直线上，此时边长为 5 的正方形是可以按照题目要求包含 2 个矩形。



Problem 6

考点：平面几何

解答：周长即为 4 条半圆弧的总长，恰好形成 2 个完整的圆的周长。而正方形边

长为 $\frac{2}{\pi}$ ，也为圆的直径。所以周长为 $2\pi D = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 4$ ，选 D。

Problem 7

考点：算术

解答：

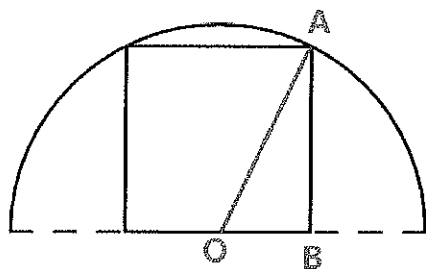
$$\sqrt{\frac{x}{1 - \frac{x-1}{x}}} = \sqrt{\frac{x}{\frac{x}{x} - \frac{x-1}{x}}} = \sqrt{\frac{x}{\frac{x-(x-1)}{x}}} = \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{x}}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

因为 $x < 0$, $|x| = \boxed{(A) - x}$

Problem 8

考点：平面几何

解答：



设圆心为 O 。如上图所示，连接 OA ，则 OA 为半径。因为正方形的面积是 40，

所以边长 $AB = 2\sqrt{10}$ ， $OB = \sqrt{10}$ ，在直角 $\triangle AOB$ 中，由勾股定理，得到，

$AO = \sqrt{40+10} = 5\sqrt{2}$ ，则半圆的面积是 $S = \frac{1}{2}\pi \cdot OA^2 = 25\pi$ ，选 B。

Problem 9

考点：代数（比例）

解答：600 克柠檬水总共含有 $25+386=411$ 卡路里。那么 200 克柠檬水含有

$\frac{411}{3}=137$ 卡路里。选 B。

Problem 10

考点：平面几何（三角形内的不等式）

解答：假设第二条边长度是 x ，第一条边是 $3x$ ，那么 $3x-x < 15 < 3x+x$ ，

$2x < 15 < 4x$, $3.75 < x < 7.5$ 。而 x 是个整数， x 最大为 7，三角形周长 $4x+15$ 的最

大值为 $28+15=43$ ，选 A。

Problem 11

考点：数论（结尾0的个数，模运算）（知识点在店内 AMC10 双语教材有讲解）

解答：因为 $10!$ 结尾0的个数为 $\left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor = 2$ ，即十位是个0。从 $10!$ 开始往后，每

个阶乘结尾0的个数都至少是2个，因此十位均为0，那么我们只需要算 $7!+8!+9!$

的十位数字即可。 $7! = 5040$ ，所以 $7! \equiv 40 \pmod{100}$ ，那么

$8! \equiv 7 \times 8 \equiv 40 \times 8 \equiv 20 \pmod{100}$ ， $9! \equiv 8 \times 9 \equiv 20 \times 9 \equiv 80 \pmod{100}$ ，所以

$7!+8!+9! \equiv 40+20+80 \equiv 40 \pmod{100}$ ，即 $7!+8!+9!$ 的十位数字是4，选C。

Problem 12

考点：解析几何（直线）

解答：因为点 $(1, 2)$ 都在2条直线上，因此代入直线方程， $1 = \frac{1}{4} \times 2 + a$ ，以及

$2 = \frac{1}{4} \times 1 + b$ ，分别解得， $a = \frac{1}{2}$ ， $b = \frac{7}{4}$ ，那么 $a+b = \frac{9}{4}$ ，选E。

Problem 13

考点：算术

解答：Joe 的咖啡中有2盎司的奶油。JoAnn 加了2盎司的奶油后，假设2盎司

的混合物中奶油量是 x 盎司，那么有 $\frac{2}{12+2} = \frac{x}{2}$ ，解得， $x = \frac{2}{7}$ 盎司，那么 JoAnn

的杯中还剩下奶油 $2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$ 盎司。因此 Jo 和 JoAnn 的咖啡中奶油量之比是

$2 : \frac{12}{7} = \frac{7}{6}$ ，选E。

Problem 14

考点：多项式（韦达定理）

解答：因为 a 和 b 为方程 $x^2 - mx + 2 = 0$ 的根，根据韦达定理， $ab = 2$ 。因为

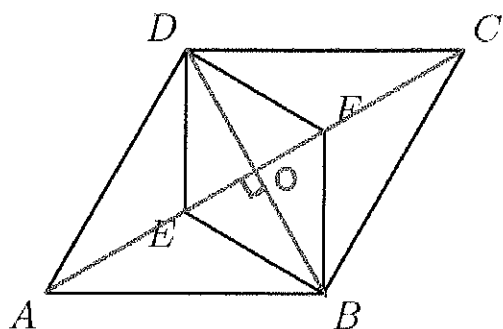
$a + (1/b)$ 和 $b + (1/a)$ 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的根，所以

$$a = (a + \frac{1}{b})(b + \frac{1}{a}) = ab + 2 + \frac{1}{ab} = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \text{ 选 D.}$$

Problem 15

考点：平面几何（相似形）

解答：



因为 2 个菱形为相似形，因此它们的面积比等于相似比的平方。连接 AC 和 BD 交于 O，则 AC 垂直平分 BD。因为 $DE = BE$ ， $DF = BF$ ，因此 E 和 F 均在 BD 的垂直平分线 AC 上。因为 $\angle BAD = 60^\circ$ ，所以 $\angle BAO = 30^\circ$ ，所以 2 个菱形的相似

比为： $\frac{AC}{BD} = \frac{AO}{BO} = \sqrt{3}$ ，那么 $\frac{S_{ABCD}}{S_{EBFD}} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2 = 3$ ，而 $S_{ABCD} = 24$ ，所以 $S_{EBFD} = 8$ 。

选 C。

Problem 16

考点：数论（余数）

解答：我们只需要算出从 2004 年 2 月 29 日到 2020 年 2 月 29 日经过的天数，然后模 7 即可。从 2004 年到 2020 年，共经过 16 年，其中 2008, 2012, 2016, 2020 年这 4 年是闰年，其余 12 年为平年。因此经过的总天数是 $16 \times 365 + 4 \times 1$ 天，那么

模 7 的结果为: $16 \times 365 + 4 \times 1 \equiv 2 \times 1 + 4 \equiv 6 \pmod{7}$, 余数为 6, 因此从星期天往后推 6 天是周六, 选 E。

Problem 17

考点: 条件概率

解答: 要求最后包里装的球一模一样, 那么 Bob 抽到的球的颜色要和 Alice 抽到的球颜色相同。首先, Alice 可以随便从包里抽取一个球, 不指定球的颜色, 概率为 1。例如, Alice 抽到红色的球, 接着 Bob 从包里抽出红色球的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。因此最后两个包里装的球一模一样的概率是 $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, 选 D。

Problem 18

考点: 数列

解析: 针对这种三阶递推, 首先需要把三阶变成二阶。然后再使用二阶递推公式解决。

解答: 由 $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$, 得, $a_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}$, 这两式相乘, 得到, $a_n a_{n-3} = 1$, 因此, $a_n = \frac{1}{a_{n-3}}$,

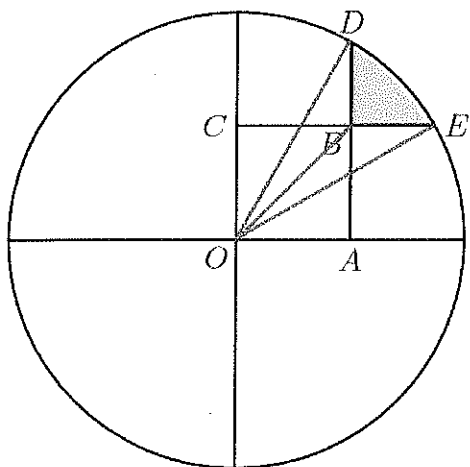
而 $a_{n-3} = \frac{1}{a_{n-6}}$, 立即得到, $a_n = a_{n-6}$, 即周期为 6。所以 $a_{2006} = a_2 = 3$

Answer: E

Problem 19

考点: 平面几何

解答:



连接 OD, OB, OE。阴影部分的面积等于扇形 DOE 的面积减去 $\triangle DBO$ 与 $\triangle EBO$ 的面积之和。因为在直角 $\triangle DOA$ 中, $AO = 1 = \frac{1}{2}DO$, 所以 $\angle DOA = 60^\circ$, 且 $AD = \sqrt{3}$, $DB = \sqrt{3} - 1$ 。因此 $\angle DOC = 30^\circ$ 。同理, $\angle EOA = 30^\circ$, 因此 $\angle DOE = 30^\circ$, 那么扇形 DOE 的面积为 $S_{\text{扇形DOE}} = \frac{1}{12}\pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{3}$ 。因为 $S_{\triangle DBO} = \frac{1}{2}DB \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, 而 $S_{\triangle EBO} = S_{\triangle DBO} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, 所以阴影部分面积是 $S = S_{\text{扇形DOE}} - S_{\triangle DBO} - S_{\triangle EBO} = \frac{\pi}{3} - (\sqrt{3} - 1) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$, 选 A。

Problem 20

考点: 解析几何 (垂直直线的斜率关系, 距离公式)

解答: 因为 $AB \perp AD$, 所以斜率之积为 -1, 而 AB 的斜率是 $\frac{178 + 22}{2006 - 6} = \frac{200}{2000} = \frac{1}{10}$, AD 的斜率是 $\frac{y + 22}{8 - 6} = \frac{y + 22}{2}$, 所以 $\frac{1}{10} \cdot \frac{y + 22}{2} = -1$, 解得, $y = -42$, 则 $D(8, -42)$ 。由距离公式, $AB = \sqrt{2000^2 + 200^2} = 200\sqrt{101}$, $AD = \sqrt{(-20)^2 + 2^2} = 2\sqrt{101}$, 因此矩形 ABCD 的面积是 $S = AB \cdot AD = 400 \times 101 = 40400$, 选 E。

Problem 21

考点: 概率 (分类讨论)

解答：因为投到这6个数字的概率总和是1，因此，投到数字1的概率是 $\frac{1}{21}$ ，投到数字2的概率是 $\frac{2}{21}$ ，...，投到数字6的概率是 $\frac{6}{21}$ 。要使得2个骰子数字和为7，这里需要分类讨论。

①若一个骰子投到1，另一个投到6. 首先将1和6分配给2个骰子，有2种可能性。如第一个投到1，第二个投到6，则概率为 $\frac{1}{21} \times \frac{6}{21}$ 。因此这种情况的概率是 $P_1 = 2 \times \frac{1}{21} \times \frac{6}{21} = \frac{12}{21^2}$ 。

②若一个骰子投到2，另一个投到5. 类似第①种算法，我们可得概率为

$$P_2 = 2 \times \frac{2}{21} \times \frac{5}{21} = \frac{20}{21^2}。$$

③若一个骰子投到3，另一个投到4. 类似第①种算法，我们可得概率为

$$P_3 = 2 \times \frac{3}{21} \times \frac{4}{21} = \frac{24}{21^2}。$$

综上，总的概率是 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{12}{21^2} + \frac{20}{21^2} + \frac{24}{21^2} = \frac{56}{21^2} = \frac{8}{63}$ ，选C。

Problem 22

考点：数论（不定方程）

解答： $(4B+5J) \cdot N = 253 = 11 \times 23$ 。因此 $\begin{cases} 4B+5J=11 \\ N=23 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 4B+5J=23 \\ N=11 \end{cases}$ 。对于第一

个方程组，当J分别为1,2时，B均不为整数。因此无整数解。对于第二个方程

组，分别将J=1,2,3,4代入，发现只有当J=3时，B=2是整数。因此一个三明治

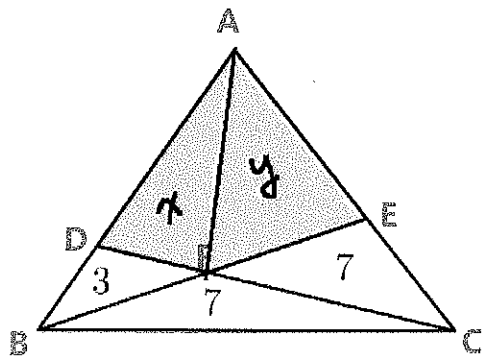
需要3勺果酱，而总共做了11个三明治，那么总成本是 $0.05 \times 3 \times 11 = 1.65$ 美元。

选D。

Problem 23

考点：平面几何

解答：



连接 AF。阴影四边形被分成 2 个三角形，假设这 2 个三角形面积分别是 x 和 y ，

如上图所示。因为 $\frac{S_{\triangle BFC}}{S_{\triangle EFC}} = \frac{BF}{EF} = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}}$ ，所以 $\frac{7}{7} = \frac{3+x}{y}$ 。另一方面，因为

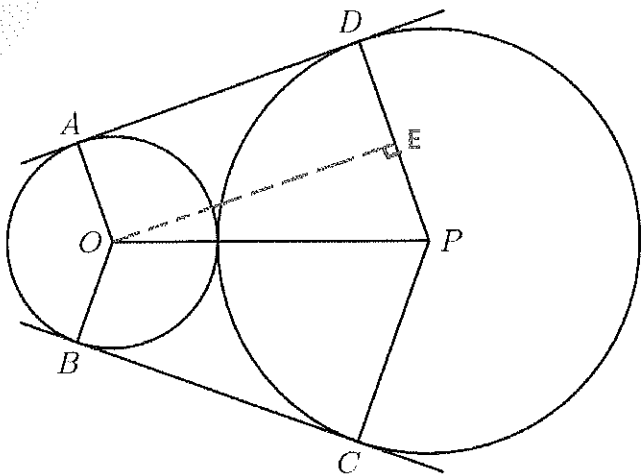
$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{DF}{CF} = \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ACF}}，所以 \frac{3}{7} = \frac{x}{y+7}。由这 2 个方程，解得，\begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ y = \frac{21}{2} \end{cases}。那么阴$$

影部分面积是 $\frac{36}{2} = 18$ ，选 D。

Problem 24

考点：平面几何

解答：



多边形 $AOBCPD$ 是关于直线 OP 对称的, 因此梯形 $AOPD$ 和梯形 $BOPC$ 面积相等, 我们只需算出梯形 $AOPD$ 的面积即可。过 O 作 $OE \perp PD$ 于 E , 则

$DE = AO = 2$, $PE = PD - ED = 4 - 2 = 2$, 而在直角 $\triangle POE$ 中, $PO = 4 + 2 = 6$,

由勾股定理得, $OE = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$ 。因此梯形 $AOPD$ 的面积是:

$S_{AOPD} = \frac{1}{2}(2 + 4) \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$, 那么多边形 $AOBCPD$ 的面积是 $24\sqrt{2}$, 选 D.

Problem 25

考点: 数论 (整除)

解答: 选 B。

假设车牌的两个不同的数字是 A 和 B , 因为能被 9 整除, 所以各个位数字之和 $2(A+B)$ 能被 9 整除, 因此 $A+B$ 只能为 9. 那么 A, B 的取值为 1 和 8, 或 2 和 7, 或 3 和 6, 或 4 和 5. 那么车牌的后两位可能是: 18, 81, 11, 88, 27, 72, 22, 77, 36, 63, 33, 66, 45, 54, 44, 55. 然而因为车牌的后两位是琼斯先生的年龄, 且考虑到他最大的孩子是 9 岁, 所以琼斯先生的合理年龄是: 36, 33, 45, 54, 44, 55 岁中的其中 1 个。因为其他 8 个孩子的年龄是从数字 1 到 8 中选 7 个, 数字 4 和 8 必定至少选 1 个。因此这个四位车牌一定能被 4 整除, 所以最后两位也能被 4 整除, 所以

琼斯先生的年龄只可能是：36 或 44，对应的车牌只可能是 3636,6336,5544。这 4 个车牌都不能被 5 整除。因此选 B。

其实可以取验证下，发现只有 5544 可以被 1,2,3,4,6,7,8 同时整除。所以车牌号是 5544，其余 8 个孩子的年龄是 1,2,3,4,6,7,8。