

2007 AMC10A 解答

Problem 1

考点：算术

解答：Susan 买 4 张票实际花了 $20 \cdot 4 \cdot (1 - 25\%) = 80 \cdot 0.75 = 60$ 美元。Pam 买 5 张票实际花了 $20 \cdot 5 \cdot (1 - 30\%) = 100 \cdot 0.7 = 70$ 美元，因此 Pam 比 Susan 多花了 10 美元，选 C。

Problem 2

考点：算术

解答： $6@2 = 6 * 2 - 2^2 = 8$ ，且 $6\#2 = 6 + 2 - 6 * 2^2 = -16$ ，因此

$\frac{6@2}{6\#2} = \frac{8}{-16} = -\frac{1}{2}$ 。那么答案选 A。

Problem 3

考点：立体几何

解答：将砖块的体积除以水缸的底面积，即为水升高的高度，所以

$$h = \frac{40 \times 20 \times 10}{100 \times 40} = 2 \text{ 厘米，选 D。}$$

Problem 4

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设较小的数是 x ，则较大的数是 $x+2$ 。因此有 $x+2=3x$ ，解得， $x=1$ 。所

以较小的数是 1，较大的数是 3，和为 4，选 A。

Problem 5

考点:代数(列方程解应用题)

解答:假设一支铅笔需要 x 美元,一本笔记本需要 y 美元。因此 $7x+8y=4.15$,
且 $5x+3y=1.77$,解得, $x=0.09, y=0.44$,那么 $16x+10y=16\cdot 0.09+10\cdot 0.44=5.84$,
选 B.

Problem 6

考点:算术(百分数)

解答:我们计算各个选项中增加的百分数,结果如下:

$$\text{选项 A: } \frac{66-60}{60} = 10\%$$

$$\text{选项 B: } \frac{70-66}{66} \approx 6\%$$

$$\text{选项 C: } \frac{76-70}{70} \approx 8.6\%$$

$$\text{选项 D: } \frac{78-76}{76} \approx 2.6\%$$

$$\text{选项 E: } \frac{85-78}{78} \approx 9\%$$

因此答案选(A).

Problem 7

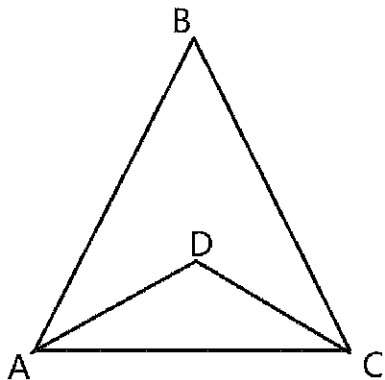
考点:代数(列方程解应用题)

解答:假设他的遗产为 x 美元。由题意, $20\%x+10\%\cdot 80\%x=10500$, 即
 $0.28x=10500$, $x=37500$. 选 D.

Problem 8

考点：平面几何

解答：



因为 $\angle ABC = 40^\circ$, $AB = BC$, 所以 $\angle BAC = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$; 因为 $\angle ADC = 140^\circ$, $AD = DC$, 所以 $\angle DAC = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$, 所以 $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$, 选 D。

Problem 9

考点：代数（解方程）

解答： $3^a = 81^{b+2} = 3^{4(b+2)} = 3^{4b+8}$, 所以 $a = 4b + 8$. $125^b = 5^{3b} = 5^{a-3}$, 则 $3b = a - 3$. 将 $a = 4b + 8$ 代入, 得到 $3b = 4b + 8 - 3$, $b = -5$, $a = -12$, 那么 $ab = 60$, 选 E.

Problem 10

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设有 x 个孩子。因为家族所有成员平均年龄是 20 岁, 那么家族里所有成员的年龄之和是 $20(x+2)$ 岁。而父亲年龄是 48 岁, 则母亲和孩子们的年龄之

和是 $20(x+2)-48=20x-8$ 岁, 因为母亲和孩子们的年龄平均值为 16 岁, 则

$20x-8=16(x+1)$, 解得, $x=6$ 。选 E.

Problem 11

考点: 算术

解答: 假设这个共同的和是 x , 这 6 个和全部相加, 相当于每个顶点上的数字重

复加了 3 次, 即 $6x=3(1+2+3+\dots+8)=3\cdot\frac{9\cdot8}{2}=108$, 所以 $x=\frac{108}{6}=18$, 选 C.

Problem 12

考点: 排列组合(球和罐子, 球不同)

解答: 这里 2 个导游相当于 2 个罐子, 现在要把 6 个不同的球放入这 2 个罐子中,

且罐子不为空的方法数。先允许罐子为空, 则共有 $2^6=64$ 种方法, 但有一个罐

子为空的情况有 2 种, 因此罐子不为空的情况是 62 种。答案选 D.

Problem 13

考点: 代数(解方程)

解答: 假设 Yan 的走路速度是 x , 那么他骑车的速度是 $7x$ 。假设 Yan 到他家的

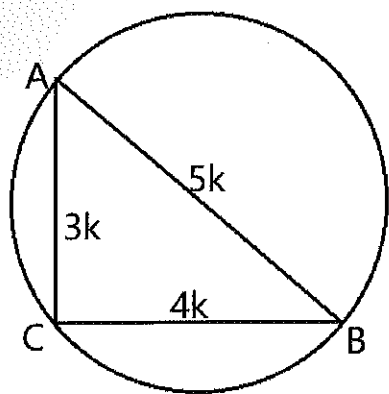
距离是 y , 到体育场的距离是 z 。因为所需时间相同, 所以 $\frac{z}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z+y}{7x}$, 化简,

$7z=7y+z+y$, $6z=8y$, $\frac{y}{z}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, 选 B.

Problem 14

考点: 平面几何

解答:



因为三边长之比是3:4:5, 则三角形是个直角三角形。设三边长为 $3k, 4k, 5k$ 。

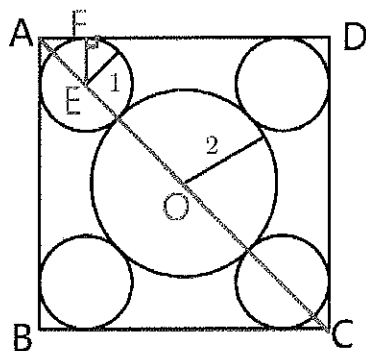
则 $5k$ 为斜边, 且同时也是圆的直径, 因此 $5k=6, k=\frac{6}{5}$, 那么三角形的面积是

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 4k = 6k^2 = 6 \times \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{216}{25} = 8.64, \text{ 选 A。}$$

Problem 15

考点: 平面几何

解答:



如上图所示, 连接对角线 AC 。则小圆心 E 和大圆心 O 均在 AC 上。在等腰直角

$\triangle AEF$ 中, 因为 $EF=1$, 所以 $AE=\sqrt{2}$, 而 $EO=1+2=3$, 所以 $AO=\sqrt{2}+3$,

$AC=2 \cdot AO=2\sqrt{2}+6$, 那么正方形面积为 $\frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}+6)^2 = 2(11+6\sqrt{2})$ 。选

B。

Problem 16

考点: 概率

解答: $ad - bc$ 是偶数的条件是 ad 和 bc 的奇偶性相同。0~2007 之间(包括 0 和 2007)有一半是偶数, 一半是奇数。所以随机选一个数, 是奇数或偶数的概率均为 $\frac{1}{2}$ 。

①若 ad 和 bc 均为奇数。 ad 为奇数时, 则 a, d 均为奇数, 概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 。同理,

bc 为奇数的概率也为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 。那么 ad 和 bc 均为奇数的概率为 $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 。

②若 ad 和 bc 均为偶数。 ad 为偶数的概率是 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, bc 为偶数的概率也为 $\frac{3}{4}$,

那么 ad 和 bc 均为偶数的概率是 $P_2 = \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$ 。

综上, 总的概率是 $P = P_1 + P_2 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$, 选 E。

Problem 17

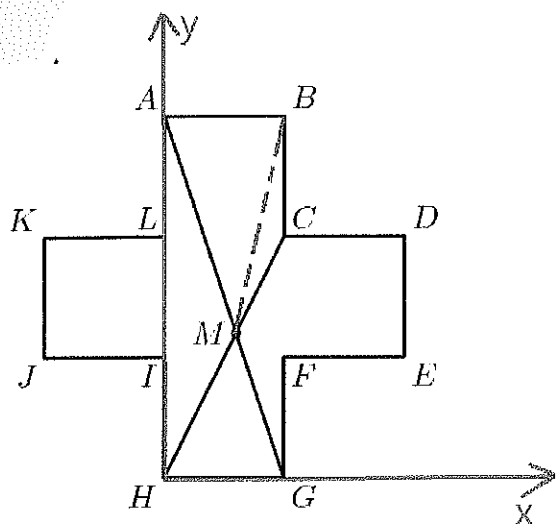
考点: 数论(不定方程)

解答: 方程 $75m = n^3$ 变成: $5^2 \cdot 3 \cdot m = n^3$, 要使得左边是个完全立方, 因此 m 的因子中, 至少含有 $5 \cdot 3^2 = 45$, 此时 m 的最小值, 此时 n 的最小值为 15, 那么 $m+n=60$, 选 D。

Problem 18

考点: 平面几何

解答:



以 HG 为 x 轴，AH 为 y 轴，建立图示坐标系。A(0,12), G(4,0), H(0,0), C(4,8), 因

此直线 AG 的方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$ ，直线 CH 的方程为 $y = 2x$ ，联立方程组解得，

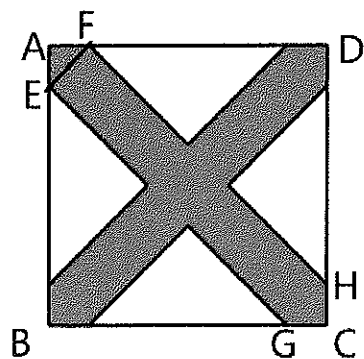
$$\begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}, \text{ 则 } M(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}). \text{ 所以 } \triangle ABM \text{ 面积为 } S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{36}{5} = \frac{72}{5}, \triangle CBM \text{ 面}$$

积为 $S_{\triangle CBM} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$ ，那么 $S_{\triangle ABCM} = \frac{72}{5} + \frac{16}{5} = \frac{88}{5}$ ，选 C.

Problem 19

考点：平面几何

解答：



连接 EF. 假设正方形边长为 1, 画笔宽度为 $2x$ 。如上图, 在等腰直角三角形 AEF 中, $EF = 2x$, $AE = AF = \sqrt{2}x$, $BE = 1 - \sqrt{2}x$, 那么在等腰直角三角形 BEG 中,

$EG = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}x) = \sqrt{2} - 2x$. 则图形 AEGCHF 的面积为

$$S = 2S_{\triangle AEF} + S_{EFHG} = 2 \times \frac{1}{2} AE^2 + EF \times EG = 2x^2 + 2x(\sqrt{2} - 2x) = 2\sqrt{2}x - 2x^2. \text{ 那么阴}$$

影部分面积为 $2S$ 减去中间正方形的面积, 即

$$2S - EF^2 = 4\sqrt{2}x - 4x^2 - 4x^2 = 4\sqrt{2}x - 8x^2, \text{ 此面积是正方形面积的一半 } \frac{1}{2}, \text{ 即}$$

$$4\sqrt{2}x - 8x^2 = \frac{1}{2}, \text{ 解得, } x = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{4}, \text{ 因为画笔宽度 } 2x < 1, x < \frac{1}{2}. \text{ 所以 } x = \frac{\sqrt{2} - 1}{4},$$

$$\text{那么正方形边长和画笔宽度的比值为 } \frac{1}{2x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = 2(\sqrt{2} + 1), \text{ 选 C.}$$

Problem 20

考点: 代数 (代数变形)

解答: $(a + a^{-1})^2 = 16$, 即 $a^2 + a^{-2} + 2 = 16$, $a^2 + a^{-2} = 14$, 两边平方, $a^4 + a^{-4} + 2 = 196$,

那么 $a^4 + a^{-4} = 194$, 选 D。

Problem 21

考点: 立体几何

解答: 表面积为 24 的正方体, 每个面的面积是 4, 那么棱长是 2. 因为球和它内

切, 那么球的直径为 2. 因为球内接第二个正方体, 则此正方体的对角线等于球

的直径, 为 2. 假设这个正方体棱长为 x , 那么有 $\sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = 2$, 即 $\sqrt{3}x = 2$,

所以 $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 因此表面积为 $6x^2 = 6 \times \frac{4}{3} = 8$, 选 C.

Problem 22

考点: 数列 (整除)

解答: 我们可以先写出一个具体的数列看有何特征: $abc, bcd, cde, def, efg, fga, gab$. 我们写出了有一个有 7 项的这样的数列, 这些项的百位数字之和、十位数字之和, 个位数字之和均相等, 等于 $a+b+c+d+e+f+g=k$, 因此这些项之和为 $S=100k+10k+k=111k=3\cdot 37\cdot k$. 这对 7 项数列如此, 对于含更多项的这种数列同样如此, 区别在于 k 会变得更大。因此看到总能整除 S 的最大质因数为 37, 选 D。

Problem 23

考点: 数论 (不定方程)

解答: $m^2 - n^2 = 96$, 所以 $(m+n)(m-n) = 96 \times 1 = 48 \times 2 = 32 \cdot 3 = 24 \cdot 4 = 16 \cdot 6 = 12 \cdot 8$, 能得到如下 6 组方程组:

$$\begin{cases} m+n=96 \\ m-n=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m+n=48 \\ m-n=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m+n=32 \\ m-n=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m+n=24 \\ m-n=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m+n=16 \\ m-n=6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m+n=12 \\ m-n=8 \end{cases}.$$

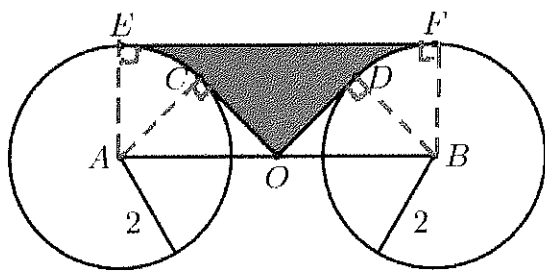
其中只有第 2, 4, 5, 6 组有正整数解, 分别是 $\begin{cases} m=25 \\ n=23 \end{cases}$, $\begin{cases} m=14 \\ n=10 \end{cases}$, $\begin{cases} m=11 \\ n=5 \end{cases}$, $\begin{cases} m=10 \\ n=2 \end{cases}$ 。

因此总共 4 对, 选 B。

Problem 24

考点: 平面几何

解答:



连接 AE, BF, AC, BD 。我们只要将矩形 $AEFB$ 的面积减去两个扇形 EAC 和 FBD 的面积,再减去 2 个三角形 ACO 和 BDO 的面积即可。因为 $AE = 2, AB = 4\sqrt{2}$, 所以矩形 $AEFB$ 面积为 $S_{AEFB} = 2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ 。因为直角三角形 ACO 中, $AC = 2, AO = 2\sqrt{2}$, 所以 $\angle CAO = 45^\circ$, 则 $\triangle ACO$ 为等腰直角三角形, 面积为 $S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$, 由对称性, $S_{\triangle BDO} = S_{\triangle ACO} = 2$ 。所以两个扇形均为圆心角为 45° 的扇形, 面积均为 $\frac{1}{8} \pi \times 2^2 = \frac{1}{2} \pi$, 那么阴影部分面积是 $S = 8\sqrt{2} - 2 - 2 - \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi = 8\sqrt{2} - 4 - \pi$, 选 B。

Problem 25

考点: 数论 (不定方程)

解答: 因为 $S(n)$ 和 $S(S(n))$ 均为正数, 因此 $n < 2007$, 这是 n 的上限; 因为 $S(n) < S(9999) = 36$, 所以 $S(n)$ 最多是个 2 位数, 且十位最多是 3, 个位最多是 9, 但无法同时取到。那么 $S(S(n)) < S(39) = 12$ 。由此 $S(n) + S(S(n)) < 36 + 12 = 48$, 那么 $n > 2007 - 48 = 1959$ 。所以 $1959 < n < 2007$ 。

①若 $n = 200a$ 这种形式, 其中 $a = 0 \sim 9$, 那么原方程变为:

$2000 + a + 2 + a + S(2 + a) = 2007$, 即 $2a + S(2 + a) = 5$, 因为 $S(2 + a) > 0$, 所以

$2a < 5, a \leq 2$, 依次将 $a = 0, 1, 2$ 代入方程 $2a + S(2 + a) = 5$ 检验, 只有 $a = 1$ 成立。因

此对应的 $n = 2001$ 。

②若 $n=19bc$ 这种形式, 其中 b, c 均为 $0\sim 9$ 的数字。那么原方程变为:

$1900+10b+c+10+b+c+S(10+b+c)=2007$, 即 $11b+2c+S(10+b+c)=97$. 因为 $2c<2\times 9=18$, $10+b+c\leq 10+9+9=28$, 因此 $10+b+c$ 的十位最大为 2, 个位最大为 9, 但无法同时取到。那么 $S(10+b+c)<S(29)=11$, 所以 $11b>97-18-11=68$, 所以 $b\geq 7$ 。又因为 $2c>0, S(10+b+c)>0$, 所以 $11b<97$, 因此 $b<9$ 。因此下面分别讨论 $b=7, 8$ 。

(i) 若 $b=7$, 则方程 $11b+2c+S(10+b+c)=97$ 变为: $77+2c+S(17+c)=97$, 即 $2c+S(17+c)=20$ 。因为 $17+c\leq 17+9=26$, 个位最大取 9, 十位最大取 2, 因此 $S(17+c)<S(29)=11$, 那么 $2c>20-11=9$, $c\geq 5$ 。依次将 $c=5, 6, 7, 8, 9$ 代入 $2c+S(17+c)=20$ 检验, 只有 $c=7$ 符合。对应的 $n=1977$ 。

(ii) 若 $b=8$, 则方程 $11b+2c+S(10+b+c)=97$ 变为: $88+2c+S(18+c)=97$, 即 $2c+S(18+c)=9$ 。因为 $S(18+c)>0$, 那么 $2c<9$, $c\leq 4$ 。依次将 $c=0, 1, 2, 3, 4$ 代入 $2c+S(18+c)=9$ 检验, 只有 $c=0, 3$ 符合。对应的 $n=1980$ 和 $n=1983$ 。

综上, $n=1980, 1983, 1977, 2001$ 共这 4 个值, 选 D.