

2007 AMC10B 解答

Problem 1

考点: 算术

解答: 每个房间的墙壁的面积是 $2(12 \times 8 + 10 \times 8) = 352$ 平方英尺, 需要粉刷的面积是: $352 - 60 = 292$ 平方英尺。一共有 3 个卧室, 因此总共需要粉刷的面积是: $292 \times 3 = 876$ 平方英尺, 选 E.

Problem 2

考点: 算术

解答: $(3 \star 5) = (3+5) \times 5 = 40$, $(5 \star 3) = (5+3) \times 3 = 24$, 所以 $(3 \star 5) - (5 \star 3) = 40 - 24 = 16$. 选 E.

Problem 3

考点: 算术

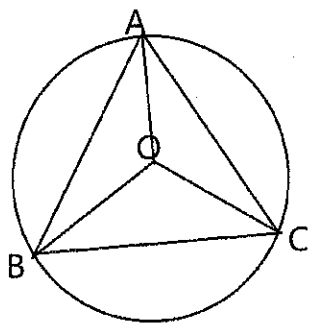
解答: 回家途中总共消耗汽油 $\frac{120}{30} = 4$ 加仑。回程中, 消耗汽油 $\frac{120}{20} = 6$ 加仑。那

么往返总共耗油 10 加仑, 而往返总路程是 240 英里, 因此平均汽油里程是

$\frac{240}{10} = 24$ 英里每加仑, 选 B。

Problem 4

考点: 平面几何

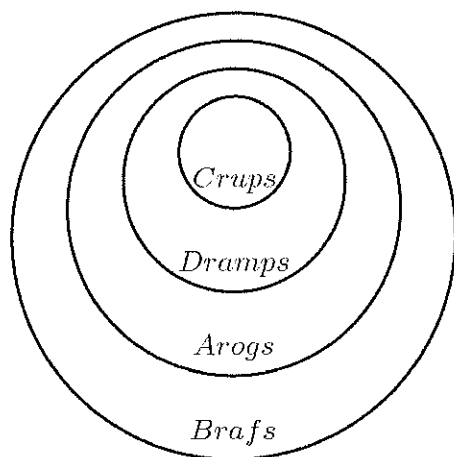


解答：因为 $\angle BOC=120^\circ$ ， $\angle AOB=140^\circ$ ，所以 $\angle BAC=60^\circ$ ， $\angle ACB=70^\circ$ ，那么 $\angle ABC=180^\circ-60^\circ-70^\circ=50^\circ$ ，选 D.

Problem 5

考点：逻辑推理

解答：



由题中的表述画出如上图。很容易看到，答案选 D。

Problem 6

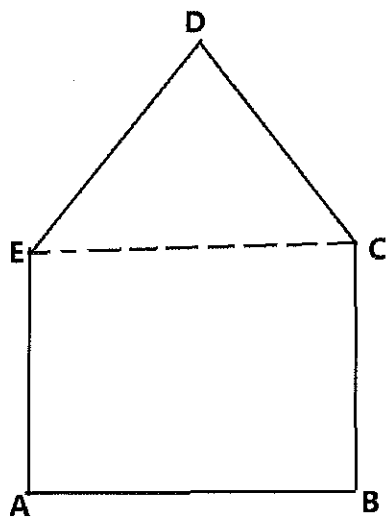
考点：算术

解答： $\frac{100-1.5 \times 3}{6} = \frac{95.5}{6} \approx 15.9$ ，因此她必须答对 16 题，选 D。

Problem 7

考点：平面几何

解答：



连接 CE。因为 $AE \parallel BC$, 且 $AE = BC$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$. 所以四边形 ABCE 是个矩形。那么 $CE = AB$, $\angle AEC = 90^\circ$ 。因此 $DE = CE = CD$, $\triangle DCE$ 是个等边三角形, 所以 $\angle DEC = 60^\circ$ 。 $\angle E = \angle AEC + \angle DEC = 150^\circ$, 选 E。

Problem 8

考点: 排列组合

解答: 因为 $b = \frac{a+c}{2}$, 且 b 是个整数, 则表明 a 和 c 同为偶数或同为奇数。所以 a 和 c 要么是从 1,3,5,7,9 中选择 2 个, 且小的给 a , 大的给 c , 要么是从 0,2,4,6,8 中选择 2 个, 且小的给 a , 大的给 c , 分别都有 $C_5^2 = 10$ 种情况, 而每种情况 b 的取值都由 $b = \frac{a+c}{2}$ 唯一确定。因此 a, b, c 的取值共 $10+10=20$ 种可能。选 D。

Problem 9

考点: 数列

解答: 最后一个 s 是 s 出现的第 12 次, 被 s 右边第

$$1+2+3+4+\dots+12 = \frac{(1+12) \times 12}{2} = 78 \text{ 个字母代替, 因为字母每 26 个循环一次, 而 78}$$

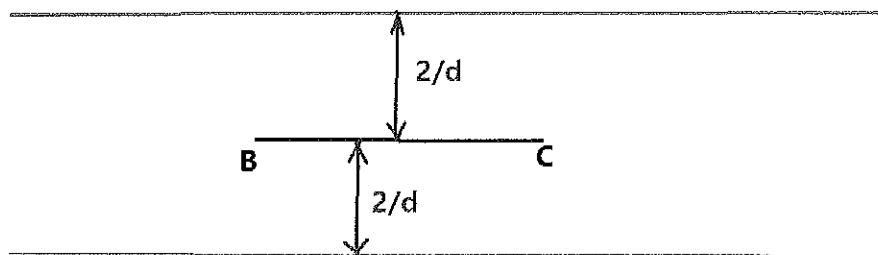
模 26 余数为 0, 因此 s 右边第 78 个字母即 s 右边第 0 个字母, 即 s , 因此选 D。

Problem 10

考点：平面几何

解答：

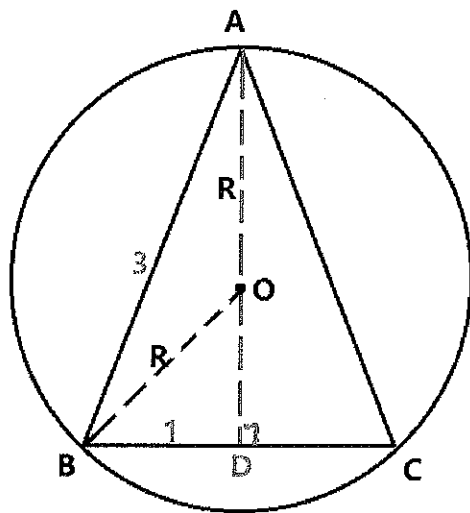
假设 BC 长度为 d , A 到 BC 的距离是 h , 则 $\frac{1}{2}dh=1$, 所以 $h=\frac{2}{d}$ 是个固定的长度, 表明 A 在和 BC 距离为 $h=\frac{2}{d}$ 的上下两条平行线上, 如下图所示。选 A。



Problem 11

考点：平面几何

解答：



过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D, 则圆心 O 在 AD 上。连接 OB。在直角 $\triangle ABD$ 中, $BD=1$, $AB=3$, 则 $AD=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ 。设圆的半径为 R , 则 $OD=2\sqrt{2}-R$ 。在直角 $\triangle BDO$

中由勾股定理, $R^2 = 1 + (2\sqrt{2} - R)^2$, 解得, $R = \frac{9}{4\sqrt{2}}$, 那么圆的面积是 $\pi R^2 = \frac{81}{32}\pi$,

选 C。

Problem 12

考点: 代数 (代数变形)

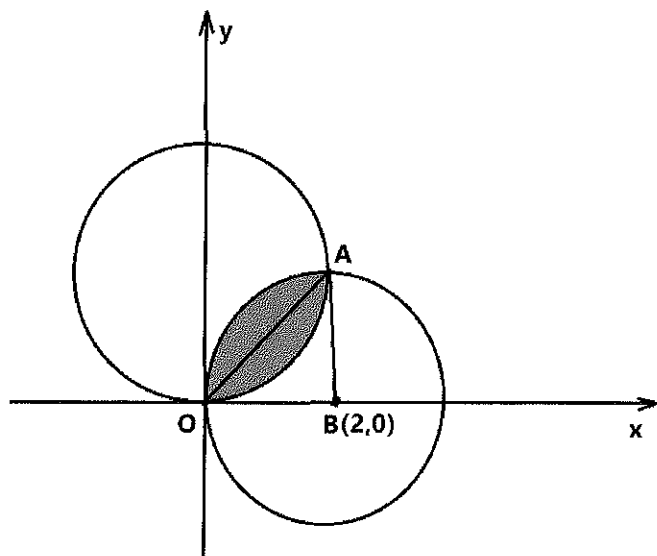
解答: 因为他的三个孩子现在年龄之和是 T , 所以 N 年前他们的年龄之和是 $T-3N$,

那么根据题意, $T-N=2(T-3N)$, 化简得, $T=5N$, 那么 $T/N=5$, 选 D。

Problem 13

考点: 平面几何

解答:



连接 OA 。由对称性, OA 将阴影部分平分且 $\angle AOB=45^\circ$ 。因此我们只要求阴影部分上半部分月牙形区域的面积即可, 假设为 S , 等于扇形 ABO 的面积减去 $\triangle ABO$ 的面积。因为 $\angle AOB=45^\circ$, $AB=BO$, 所以 $\angle OAB=45^\circ$, $\angle ABO=90^\circ$ 。所

以扇形 ABO 的面积是 $\frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi$ ，而 $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ ，因此 $S = \pi - 2$ ，那么两圆相交部分的面积是 $2S = 2(\pi - 2)$ ，选 D.

Problem 14

考点：百分数

解答：假设一开始有 x 个女孩，则最初这个群体总人数为 $\frac{x}{40\%} = \frac{5x}{2}$ 。不久之后，群体中有 $x-2$ 个女孩，总数不变，因此 $x-2 = \frac{5x}{2} \times 30\%$ ，解得， $x=8$ 。因此这个群体内一开始有 8 个女孩。

Problem 15

考点：平面几何（多边形的内角和）

解答：假设 $\angle A = 12x$ ，则 $\angle B = 6x$ ， $\angle C = 4x$ ， $\angle D = 3x$ 。由于这 4 个角之和为 360° ，所以 $12x + 6x + 4x + 3x = 360$ ， $x = \frac{72}{5}$ ，那么 $\angle A = 12x = \frac{864}{5} \approx 173$ ，选 D.

Problem 16

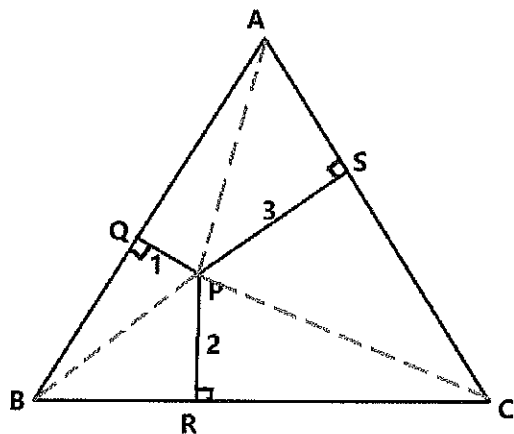
考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设这个班有 x 名 11 年级学生，则有 $9x$ 名 12 年级学生。设每个 11 年级学生得到了 y 分。那么这个班的总分是： $yx + 83 \times 9x = xy + 747x = (747 + y)x$ 分，而这个班总共 $10x$ 名学生，所以 $84 = \frac{(747 + y)x}{10x}$ ，即 $84 = \frac{(747 + y)}{10}$ ，解得， $y = 93$ ，选 C.

Problem 17

考点：平面几何（面积法）

解答：



假设等边 $\triangle ABC$ 的边长 $AB=a$ ，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。而因为

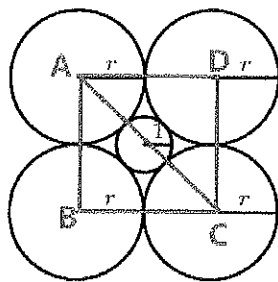
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BCP} + S_{\triangle CAP}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a}{2} + a + \frac{3a}{2} = 3a, \text{ 解得, } a = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3},$$

选 D.

Problem 18

考点:平面几何

解答:



如上图所示，四个半径为 r 的圆的圆心形成一个边长为 $2r$ 的正方形，且对角线

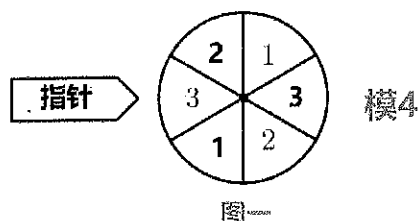
$AC = 2(r+1)$ 。因为 $\triangle ABC$ 是个等腰直角三角形，因此 $AC = \sqrt{2}AB$ ，即

$$2(r+1) = \sqrt{2} \cdot 2r, \text{ 解得, } r = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \text{ 选 B.}$$

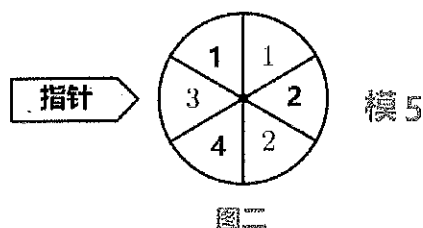
Problem 19

考点：概率（分类讨论）

解答：将轮子上的数模 4 和模 5 后，所得余数分别如下图一和图二所示：



图一



图二

下面分类讨论所确定的阴影方格的位置。

①若所确定得阴影方格在第 1 列。则第一个余数为 1，由图一得，概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，第二个余数为 1 或 3，由图二得，概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ，因此这种情况下概率为

$$P_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}。$$

②若所确定得阴影方格在第 2 列。则第一个余数为 2，由图一得，概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，第二个余数为 2 或 4，由图二得，概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ，因此这种情况下概率为

$$P_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}。$$

③若所确定得阴影方格在第 3 列。则第一个余数为 3，由图一得，概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，第二个余数为 1 或 3，由图二得，概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ，因此这种情况下概率为

$$P_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}。$$

综上，总的概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ，选 C。

Problem 20

考点: 排列组合

解答:

方法 1:

	A		D	G
	B		E	H
	C		F	I

先确定这 3 个方块到底在哪 3 行, 哪 3 列。先选择 3 行, 有 $C_5^3 = 10$ 种方法, 再选择 3 列, 有 $C_5^3 = 10$ 种方法; 这 3 行 3 列重叠的方格为如图中 A,B,C,..GHI 所示。再从 ABC 中选 1 个, 有 $C_3^1 = 3$ 种方法, 再从 DEF 中选择一个, 但需要和刚从 ABC 中选择的那个不同行, 所以有 2 种方法。最后从 GHI 中选择一个和刚选的 2 个不同行, 只有 1 种方法。根据乘法原理, 总共有 $10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$ 种方法, 选 C。

方法 2:

先确定第一个方块, 共有 25 种方法, 再确定第 2 个方块, 但不能和所选的第 1 个方块在同一行和同一列, 共有 16 种方法; 再确定第 3 个方块, 但不能和前 2 个中任何一个位于同一行或同一列, 共有 9 种方法。因此共 $25 \times 16 \times 9$ 种方法。

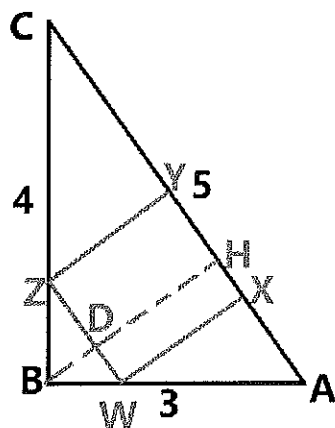
但这样选出来的 3 个方块已经考虑了选出的顺序, 而题目不考虑这 3 个方块选出的顺序, 因此还应除以这 3 个方块的全排列的方法数, 即 $3! = 6$, 因此符合题意的

方法数是 $\frac{25 \times 16 \times 9}{6} = 600$, 选 C

Problem 21

考点：平面几何（相似三角形）

解答：



过 B 作 $BH \perp CA$ 交 ZW 于 D 。所以直角 $\triangle ABC$ 的高 $BH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$ 。假设正方

形的边长是 x 。因为 $\triangle BZW \sim \triangle BCA$ ，所以 $\frac{ZW}{CA} = \frac{BD}{BH}$ ，即 $\frac{x}{5} = \frac{\frac{12}{5} - x}{\frac{12}{5}}$ ，解得，

$$x = \frac{60}{37}, \text{ 选 B.}$$

Problem 22

考点：概率（期望）

解答：2 个骰子底面数字均和选择的数字不同的概率是： $P_1 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ ；只有一个

骰子底面的数字和选择的数字相同的概率是 $P_2 = C_2^1 \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{16}$ ；2 个骰子底面的

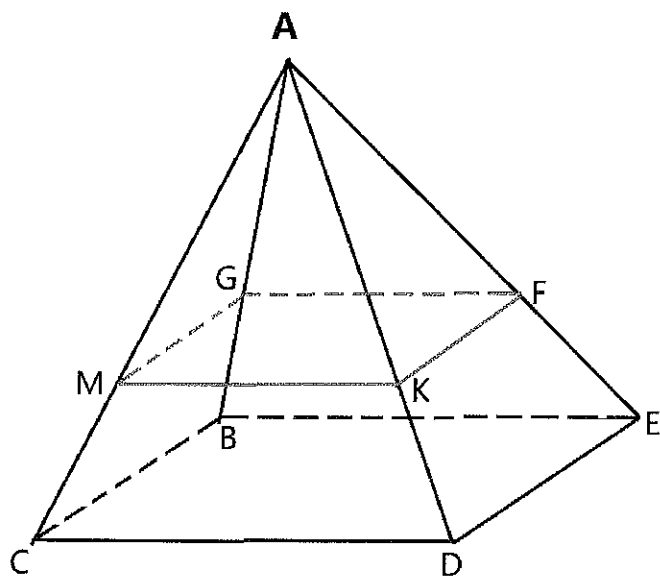
数字均和选择的数字相同的概率是 $P_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ 。因此所得回报的期望值

$$\text{是: } E = (-1) \frac{9}{16} + 1 \times \frac{6}{16} + 2 \times \frac{1}{16} = -\frac{1}{16}, \text{ 选 B.}$$

Problem 23

考点：立体几何（相似形面积比和相似比的关系）

解答:



因为小的四棱锥 A-GMKF 相似于大的四棱锥 A-BCDE, 所以它们的表面积之比等于高之比的平方。假设大四棱锥高为 H , 则小四棱锥的高为 $H-2$, 那么

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{H-2}{H} \right)^2, \text{ 即 } \frac{H-2}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 解得, } H = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4+2\sqrt{2}, \text{ 选 E.}$$

Problem 24

考点: 数论 (整除规则)

解答: 我们知道, 要求一个数能被 9 整除, 则需要各个位上数字之和能被 9 整除。

假设 n 是由 k 个 9 和 m 个 4 组成, 则需要满足 $9 | (9k+4m)$, 即需要满足 $9 | 4m$ 即可。

m 最小为 9. 因此最小的正整数 n 是由 1 个 9 和 9 个 4 组成的。因为 n 能被

4 整除, 只需要最后两位能被 4 整除, 则最后 2 位是 44. 要使得 n 尽可能小, 则

唯一的 9 应该放在百位, 其他 4 均放在 9 的前面, 由此组成的最小的 n 为

4444444944, 最后 4 位是 4944, 选 C。

Problem 25

考点：二次不定方程

关键思路解析： $\frac{9a^2+14b^2}{9ab}=k$ 是个整数，这里可以把这个关系式看成是关于 a 的

二次方程，将 a 用 b 和 k 表达出来，再确定让 a 是整数的 b 和 k 需要满足的条件。

解答： $9a^2-9kba+14b^2=0$, $a=\frac{9kb\pm\sqrt{81k^2b^2-9\cdot 56b^2}}{18}=\frac{3kb\pm b\sqrt{9k^2-56}}{6}$.

因为 a 是整数，所以 $9k^2-56=c^2$ ，即， $(3k+c)(3k-c)=56\times 1=28\times 2=14\times 4=8\times 7$

$k=5, c=13$ or $k=3, c=5$. 因此， $a=\frac{1}{3}b$ ，或 $a=\frac{14}{3}b$ 或者 $a=\frac{2}{3}b$ ，或者 $a=\frac{7}{3}b$.

因为 $(a,b)=1$ 互质，所以 $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$ or $\frac{14}{3}$ or $\frac{2}{3}$ or $\frac{7}{3}$ 一共 4 对. 选 A