

2008 AMC10A 解答

Problem 1

考点: 算术 (时间运算)

解答: 机器完成一天工作量的三分之一所花的时间为 $11:10 - 8:30 = 2:40$, 即 2 小时 40 分。那么完成一天工作量所需时间为 2 小时 40 分的 3 倍, 即 8 个小时。因为机器早上 8:30 开机, 经过 8 个小时后, 到 16:30, 即下午 4:30, 选 D。

Problem 2

考点: 平面几何

解答: 假设正方形边长为 x , 则长方形的宽为 $2x$. 那么长方形的长为 $4x$. 所以正方形面积所占长方形面积的百分数为 $\frac{x^2}{2x \cdot 4x} = \frac{1}{8} = 12.5\%$, 选 A。

Problem 3

考点: 数论 (因子)

解答: 首先, $\langle 6 \rangle = 1 + 2 + 3 = 6$, 则 $\langle \langle 6 \rangle \rangle = \langle 6 \rangle = 6$, 则 $\langle \langle \langle 6 \rangle \rangle \rangle = \langle \langle 6 \rangle \rangle = \langle 6 \rangle = 6$, 选 A。

Problem 4

考点: 分数

解答: 假设一根香蕉价格为 x 元, 一只橘子价格为 y 元, 则 $10x \cdot \frac{2}{3} = 8y$, 得到

$y = 10x \cdot \frac{2}{3 \cdot 8} = \frac{5x}{6}$, 那么和 5 根香蕉总价的 $\frac{1}{2}$ 等价的橘子数为: $\frac{5x \cdot \frac{1}{2}}{y} = \frac{\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{6}} = 3$, 选 C。

Problem 5

考点: 算术

解答:

$$\frac{8}{4} \cdot \frac{12}{8} \cdot \frac{16}{12} \cdots \frac{4n+4}{4n} \cdots \frac{2008}{2004} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{8}{8} \cdot \frac{12}{12} \cdots \frac{4n}{4n} \cdots \frac{2004}{2004} \right) \cdot 2008 = \frac{2008}{4} = 502 \Rightarrow B$$

Problem 6

考点: 算术

解答: 假设游泳, 骑自行车和跑步的路程长度均为 x 千米, 则游泳, 骑车和跑步

所花时间分别为 $\frac{x}{3}$ 小时, $\frac{x}{20}$ 小时, 和 $\frac{x}{10}$ 小时。而总路程为 $3x$ 千米, 因此平均

$$\text{速度为 } \frac{3x}{\frac{x}{3} + \frac{x}{20} + \frac{x}{10}} = \frac{3x}{\frac{20x}{60} + \frac{3x}{60} + \frac{6x}{60}} = \frac{3x}{\frac{29x}{60}} = \frac{180}{29} = 6\frac{6}{29} \approx 6, \text{ 因此选 D。}$$

Problem 7

考点: 代数 (平方差公式)

解答:

$$\text{使用平方差公式, } \frac{(3^{2008})^2 - (3^{2006})^2}{(3^{2007})^2 - (3^{2005})^2} \text{ 变为}$$

$$\frac{(3^{2008} + 3^{2006})(3^{2008} - 3^{2006})}{(3^{2007} + 3^{2005})(3^{2007} - 3^{2005})}$$

$$= \frac{3^{2006}(9+1) \cdot 3^{2006}(9-1)}{3^{2005}(9+1) \cdot 3^{2005}(9-1)}$$

$$= \boxed{(E)9}$$

Problem 8

考点: 代数 (列方程解应用题)

解答: 假设电脑的标价为 x 美元, 则在商店 A 买实际需要花 $(0.85x-90)$ 美元。而在商店 B 需要花 $0.75x$ 美元, 因此有 $0.75x - (0.85x - 90) = 15$, 解得, $x = 750$, 选 A。

Problem 9

考点: 数论 (整除)

解答: $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{x}{2}$ 是个整数, 则要求 x 是个偶数即可, 选 B。

Problem 10

考点: 平面几何

解答: 假设一个正方形边长为 x , 则连接一个正方形相邻边的中点的线段长是

$\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 。因为 S_1 的边长为 4, 则 S_2 的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$, S_3 的边长是 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = 2$,

那么 S_3 的面积是 4, 选 E。

Problem 11

考点: 代数 (不等式)

解答: 假设 LeRoy 的排水速度是 x 加仑每分钟, 则船到达岸边需要 $\frac{1}{4}$ 小时, 即

15 分钟。而此过程中船的净进水速度为 $(10-x)$ 加仑每分钟。因此要求

$(10-x) \cdot 15 \leq 30$, 解得, $x \geq 8$, 选 D。

Problem 12

考点：百分数

解答：因为有 r 个红球，那么绿球个数为 $1.6r$ ，蓝球个数为 $\frac{r}{1.25} = 0.8r$ ，因此这堆球的总个数为 $r + 1.6r + 0.8r = 3.4r$ ，选 C.

Problem 13

考点：代数（列方程解应用题）

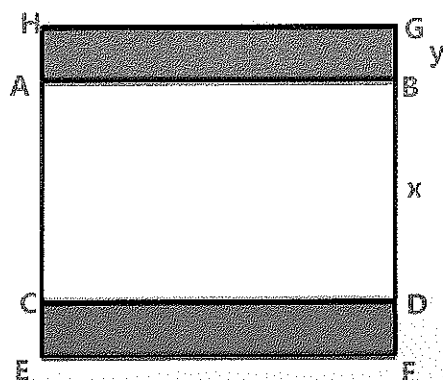
解答：将工作总量看成单位 1，则 Doug 一小时能完成工作总量的 $\frac{1}{5}$ ，Dave 一小时能完成工作总量的 $\frac{1}{7}$ ，那么他们合作则能完成工作总量的 $(\frac{1}{5} + \frac{1}{7})$ ，而因为他们用于工作的时间是 $t-1$ 小时（去除吃饭的 1 小时），就完成了任务，因此

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)(t-1) = 1, \text{ 选 D.}$$

Problem 14

考点：平面几何

解答：



因为 $\frac{EF}{GF} = \frac{4}{3}$, 则 $\frac{2x}{x+2y} = \frac{4}{3}$, 化简得, $x = 4y$. 所以 $EF = 8y$, $GF = x + 2y = 6y$, 那么

Problem 15

解答: 假设 Ian 的开车速度是 x 英里每小时, 开车时间为 y 小时, 则 Han 的速度为 $(x+5)$ 英里每小时, 开车时间为 $(y+1)$ 小时; 且 Jan 的开车速度为 $(x+10)$ 英里每小时, 开车时间为 $(y+2)$ 小时。因为 Han 比 Ian 多开了 70 英里, 因此

$$(x+10)(y+2)-xy=2(x+5y)+20=2\times 65+20=150 \text{ 英里, 选 D。}$$

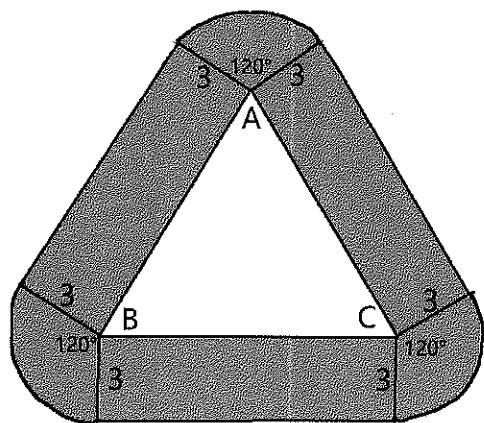
考点：平面几何

如上图, 假设小圆圆心为 P , 和 OA 切点为 Q , 和大圆切点为 C , 连接 PQ 。则直线 OP 过 C 点。假设小圆半径为 r , 因为 $\angle AOB = 60^\circ$, 则 $\angle POQ = 30^\circ$, 那么 $OP = 2r$, 因此大圆半径 $OC = 3r$ 。那么小圆和大圆面积之比为 $\frac{\pi r^2}{\pi (3r)^2} = \frac{1}{9}$, 选 B。

Problem 17

考点: 平面几何

解答:

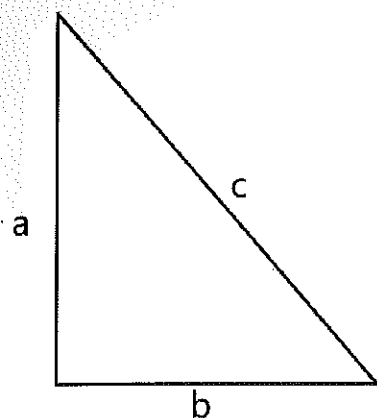


如图所示, 所求区域 (阴影部分) 由 3 个矩形和 3 个圆心角为 120° , 半径为 3 的扇形组成。而这 3 个扇形恰好拼成一个半径为 3 的圆。因此阴影部分面积为 $S = 3 \times (3 \times 6) + \pi \cdot 3^2 = 54 + 9\pi$, 选 B。

Problem 18

考点: 平面几何

解答:



令三角形的直角边为 a, b , 根据勾股定理, 则斜边长为 $\sqrt{a^2 + b^2}$, 且三角形的面

积为 $\frac{1}{2}ab$ 。因此我们有下面的方程

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 32$$

$$\frac{1}{2}ab = 20$$

对第一个方程移项后, 两边平方,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 32 - (a + b)$$

$$a^2 + b^2 = 32^2 - 64(a + b) + (a + b)^2$$

$$a^2 + b^2 + 64(a + b) = a^2 + b^2 + 2ab + 32^2$$

$$a + b = \frac{2ab + 32^2}{64}$$

由第二个方程, $ab=40$, 代入得,

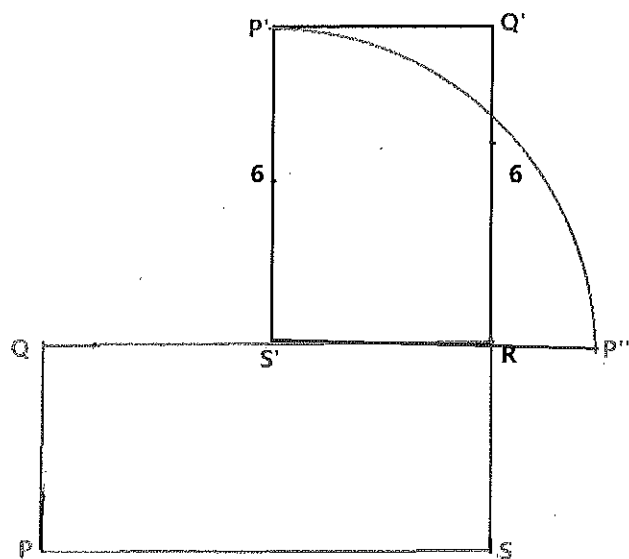
$$a + b = \frac{80 + 32^2}{64} = \frac{69}{4}$$

那么斜边长为 $p - a - b = 32 - \frac{69}{4} = \frac{59}{4}$ (B)

Problem 19

考点: 平面几何

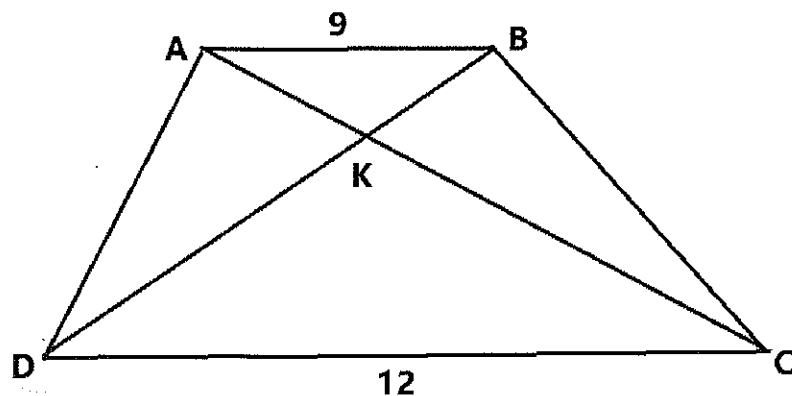
解答:



首先, 将矩形 PQRS 绕着点 R 顺时针旋转 90° , 则 P 走过的轨迹是以 R 为圆心, PR 为半径的 $1/4$ 圆弧, 长度为 $s_1 = \frac{1}{4} \times 2\pi \times PR = \frac{1}{2}\pi \cdot 2\sqrt{10} = \sqrt{10}\pi$ 。此时 S 点移到了 S' 的位置。P' 第二次走过的路径为, 以 S' 为圆心, $P'S'=6$ 为半径的 $1/4$ 圆弧, 则长度为 $s_2 = \frac{1}{4} \times 2\pi \times P'S' = \frac{1}{2}\pi \cdot 6 = 3\pi$ 。因此 P 点所走过的总长度为 $s_1 + s_2 = (3 + \sqrt{10})\pi$, 选 C。

Problem 20

考点: 平面几何 (相似三角形)



解答: 因为 $AB \parallel CD$, 则 $\triangle AKB \sim \triangle CKD$, 所以 $\frac{AK}{CK} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, 而因为

$\frac{S_{\triangle AKD}}{S_{\triangle CKD}} = \frac{AK}{CK} = \frac{3}{4}$, 所以 $S_{\triangle CKD} = \frac{4S_{\triangle AKD}}{3} = \frac{4 \cdot 24}{3} = 32$ 。同理, $\frac{S_{\triangle BKC}}{S_{\triangle DKC}} = \frac{BK}{DK} = \frac{3}{4}$, 所

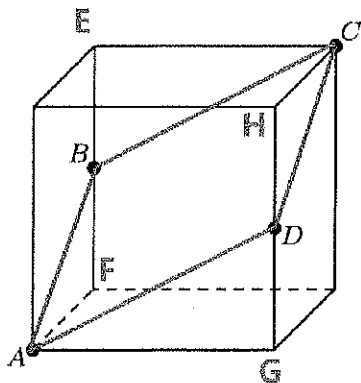
以 $S_{\triangle BKC} = \frac{3S_{\triangle DKC}}{4} = \frac{3 \times 32}{4} = 24$; $\frac{S_{\triangle AKB}}{S_{\triangle BKC}} = \frac{AK}{CK} = \frac{3}{4}$, 所以 $S_{\triangle AKB} = \frac{3S_{\triangle BKC}}{4} = \frac{3 \times 24}{4} = 18$ 。

因此, $S_{ABCD} = S_{\triangle AKD} + S_{\triangle CKD} + S_{\triangle BKC} + S_{\triangle AKB} = 24 + 32 + 24 + 18 = 98$ 。选 D。

Problem 21

考点: 立体几何

解答:



容易证明, $\triangle ECB \cong \triangle FAB \cong \triangle GAD \cong \triangle HCD$, 则 $BC=BA=AD=CD$, 所以四边

形 ABCD 为菱形, 所以 $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 选 A。

Problem 22

考点: 概率

解答:

因为得到第 4 项只要投 3 次硬币, 因此我们可以列出所有可能性如下图:

$$6 \left\{ \begin{array}{l} H: 11 \\ T: 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} H: 21 \\ T: 4.5 \\ H: 3 \\ T: 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} H: \boxed{41} \\ T: 9.5 \\ H: \boxed{8} \\ T: 1.25 \\ H: \boxed{5} \\ T: 0.5 \\ H: \boxed{-1} \\ T: \boxed{-1} \end{array} \right.$$

从上图可以看到,第4项总共有8种可能性,其他5种是整数,因此概率为 $\frac{5}{8}$,选D。

Problem 23

考点: 排列组合

解答: 首先选择交集内的2个元素,有 $C_5^2=10$ 种方法。例如选的a,b作为公共元素。则接下来需要把c,d,e这3个元素分配给这2个子集。下面分配情况进行分类讨论。

- ① 2个子集分别被分配到0个和3个元素。因为不考虑2个子集的顺序,所以只有1种方法。
- ② 2个子集分别被分配到1个和2个元素。被分配到1个的那个子集,被分配的这个元素是从3个里选择1个,有3种方法。剩下2个给另一个子集,只有1种方法。因此总共 $3 \times 1 = 3$ 种方法

因此将c,d,e这3个元素分配给A和B,一共有4种方法。那么选择这2个子集的方法数为 $10 \times 4 = 40$ 种方法,选B。

Problem 24

考点: 数论 (模运算)

解答: 求个位数字, 即是求这个数模 10 的余数。2 的幂的个位数字如下表所示:

2 的幂	个位数字
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	6
2^5	2
2^6	4
2^7	8

从上表可以看到, 个位数字的循环周期为 $T=4$. 因此 2^{2008} 的个位数字和 2^4 的个位数字一样, 为 6. 而 $2008^2 \equiv 8^2 \equiv 4 \pmod{10}$, 因此 $k = 2008^2 + 2^{2008}$ 的个位数字是 $6+4=10$ 的个位, 为 0. 那么 $k^2 \equiv 0 \pmod{10}$ 。

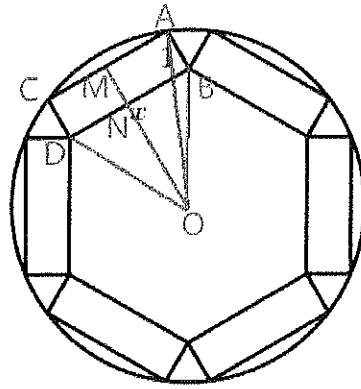
接下来要求 2^k 的个位, 需要先求 k 模 4 的余数。由于 $k = 2008^2 + 2^{2008}$, 而 2008^2 以及 2^{2008} 均为 4 的倍数, 因此 $k \equiv 0 \pmod{4}$. 那么 $2^k \equiv 2^4 \equiv 6 \pmod{10}$ 。

综上, $k^2 + 2^k \equiv 6 \pmod{10}$, 选 D。

Problem 25

考点: 平面几何 (勾股定理或圆幂定理)

解答:



如上图所示,过圆心 O 作 AC 和 BD 的垂线,垂足分别是 M 和 N 。因为 $\angle BOD=60^\circ$,
所以直角三角形 ONB 是一个 $30-60-90$ 的直角三角形。因为 $BN=x/2$, 所以

$ON = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$ 。在直角三角形 AOM 中, 运用勾股定理, 得,

$$OM^2 + AM^2 = AO^2 \text{ 即, } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4^2, \text{ 得到, } x = \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$$

Answer: C