

2008 AMC10B 解答

Problem 1

考点: 分类讨论

解答: 若2分球进了0个, 则总分为 $3 \times 5 = 15$ 分; 若2分球进了1个, 3分球进了4个, 总分为 $2 \times 1 + 3 \times 4 = 14$ 分; 若2分球进了2个, 3分球进了3个, 总分为 $2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$ 分; 若2分球进了3个, 3分球进了2个, 总分为 $2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$ 分; 若2分球进了4个, 3分球进了1个, 总分为 $2 \times 4 + 3 \times 1 = 11$ 分; 若2分球进了5个, 3分球进了0个, 总分为 $2 \times 5 = 10$ 分。所以总共有6种不同的总分, 选E。

Problem 2

考点: 算术

解答: 将表格中第2行和第4行的数字反过来排列后, 如下表所示:

1	2	3	4
11	10	9	8
15	16	17	18
25	24	23	22

因此这2条对角线上数字之和分别是 $1+10+17+22=50$, 和 $4+9+16+25=54$, 差为 $54-50=4$, 选B。

Problem 3

考点: 代数(幂运算)

解答: $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}$, 选D。

Problem 4

考点: 算术

解答: 要使得这个球员的工资尽可能高, 则需要使得其他 20 个球员的工资尽可能低, 为 15,000 美元, 且同时使得球队的总工资额最大, 为 700,000 美元。因此这名球员的最高可能工资为 $700,000 - 15,000 \times 20 = 400,000$, 选 C。

Problem 5

考点: 算术

解答:

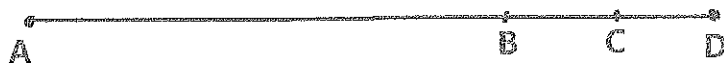
根据定义,

$$(x-y)^2 * (y-x)^2 = [(x-y)^2 - (y-x)^2]^2 = [(x-y)^2 - (x-y)^2]^2 = 0 \text{ (A)}.$$

Problem 6

考点: 平面几何

解答:



设 AD 的长度为 1, $BD = x, CD = y$, 则 $1 - x = 4x, x = \frac{1}{5}$; $1 - y = 9y, y = \frac{1}{10}$ 。那么

$BC = x - y = \frac{1}{10}$, 所以 BC 所占 AD 的比例为 $\frac{\frac{1}{10}}{1} = \frac{1}{10}$, 选 C。

Problem 7

考点: 平面几何 (等边三角形面积公式)

解答: 大的等边三角形的面积等于所有小等边三角形面积之和。大的三角形面积

为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2$, 小的三角形面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2$, 则需要的小的三角形的个数为

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2} = 100 \text{ 个, 选 C.}$$

Problem 8

考点: 数论 (不定方程)

解答: 假设某束花里, 玫瑰有 x 朵, 康乃馨有 y 朵, 则 $3x + 2y = 50$, 这里 x 和 y

均为非负整数。 $y = \frac{50 - 3x}{2}$, 为了使得 y 是个整数, 则 x 必须是个偶数, 那么

$x = 0, 2, 4, 6, 8, \dots, 16$, 共 9 种取值, 而对于 x 的每种取值, 对应唯一的 y 。因此一共可以买到 9 种不同的花束。选 C。

Problem 9

考点: 多项式 (韦达定理)

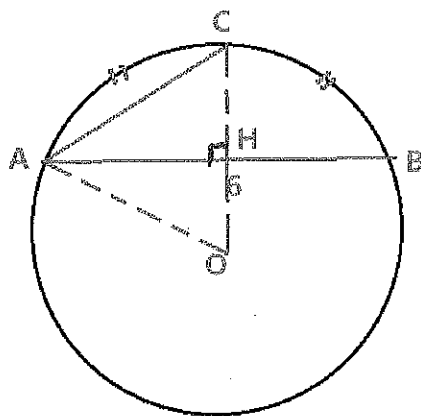
解答: 由韦达定理, 方程 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 的两个根之和为 $\frac{2a}{a} = 2$, 那么它

们的平均值为 $\frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{A}$.

Problem 10

考点: 平面几何 (垂径定理)

解答:



如上图, 因为 C 为劣弧 AB 的中点, 则连接 OC 后, OC 垂直平分 AB, 所以 $AH=3$.

在直角 $\triangle AOH$ 中, 因为 $AO=5$, 所以 $OH=4$, 所以 $CH=CO-OH=5-4=1$. 在直角

$\triangle ACH$ 中, 由勾股定理, $AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, 选 A。

Problem 11

考点: 数列

解答: 这里我们没有必要求出通项公式, 直接代入运算即可。令 $n=3$, 则

$u_5 = 2u_4 + u_3$, 即 $u_5 = 2u_4 + 9$, 此为方程①。令 $n=4$, 则 $u_6 = 2u_5 + u_4$, 即 $128 = 2u_5 + u_4$,

此为方程②。解这 2 个方程得, $u_5 = 53$, 选 B。

Problem 12

考点: 算术

解答: 因为计步器总共翻转 44 次, 而走了 100000 步后才会翻转一次。在第 45

次翻转前走了 50000 步, 因此这 1 年他总共走的步数

为: $44 \cdot 100000 + 50000 = 4450000$ 步。因为每 1800 步代表 1 英里, 因此总共走了

$\frac{4450000}{1800} \approx 2472$, 因此 2500 最接近, 选 A。

Problem 13

考点: 数列

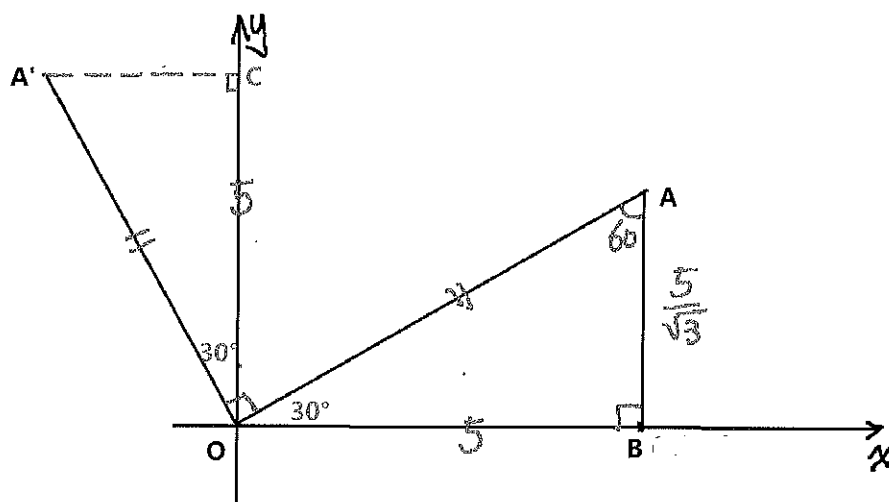
解答: 令 S_n 表示数列的前 n 项之和, 则 $\frac{S_n}{n} = n$, 即 $S_n = n^2$. 那么

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$, 则 $a_{2008} = 2 \times 2008 - 1 = 4015$, 选 B.

Problem 14

考点: 平面几何

解答:



在直角三角形 AOB 中, 因为 $BO=5$, 且 $\angle AOB=30^\circ$, 则 $AB=\frac{5}{\sqrt{3}}$. 设 A 的像为

A' , 过 A' 作 $A'C \perp y$ 轴于 C, 因此 $\triangle A'OC \cong \triangle AOB$, 所以

$A'C = AB = \frac{5}{\sqrt{3}}$, $CO = BO = 5$. 因此 $A'(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 5)$, 选 B.

Problem 15

考点: 数论 (不定方程)

解答: 由勾股定理得, $a^2 + b^2 = (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1$, 所以 $a^2 = 2b + 1$, 即

$b = \frac{a^2 - 1}{2} < 100$, 得, $a^2 < 201$, 而 a 是个整数, 因此 $2 \leq a \leq 14$ (a 不能为 1, 否

则 $b=0$)。因为 $b = \frac{a^2 - 1}{2}$ 是个整数, 因此 a 是个奇数, 则 a 只能为 3, 5, 7, 9, 11, 13,

对于每一个 a , 对应唯一的 b , 因此有 6 个这样的直角三角形, 选 A。

Problem 16

考点: 概率

解答: 这里对硬币出现正面朝上的次数进行分类讨论:

①若硬币正面朝上的次数为 0, 则骰子上数和为 0, 是个偶数, 不符题意。

②若硬币正面朝上的次数为 1, 概率为 $C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, 扔一次骰子, 得到的数为奇

数的概率是 $\frac{1}{2}$, 那么这种情况下的总概率为 $P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

③若硬币正面朝上的次数为 2, 概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 扔 2 次骰子, 和为奇数, 则必

为一奇一偶, 有 $C_2^1 \times 3 \times 3 = 18$ 种可能性, 因此概率为 $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ 。那么这种情况的总

概率为 $P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 。

综上, 概率为 $P = P_1 + P_2 = \frac{3}{8}$, 选 A。

Problem 17

考点: 概率

解答: 三种场合中挑选一个场合使选民赞成市长工作, 有 3 种可能。而对于每种

这样的可能, 概率均为 $0.7 \cdot 0.3^2$, 因此总概率为 $P = 3 \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.189$, 选 B。

Problem 18

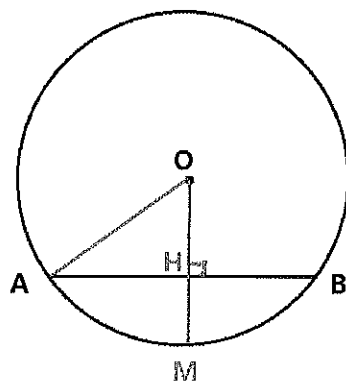
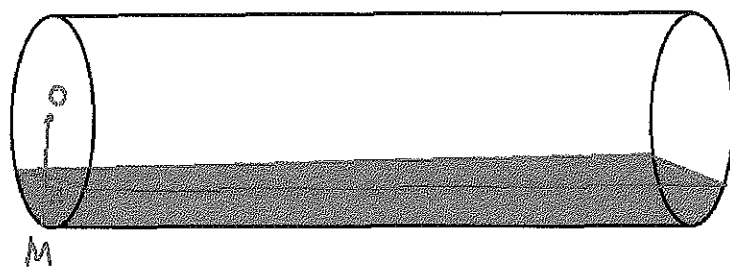
考点：代数（列方程解应用题）

解答：设一堵烟囱共 x 块砖，则 Brenda 每小时可以堆 $\frac{x}{9}$ 块砖，Brandon 每小时可以堆 $\frac{x}{10}$ 块砖，而他们共同工作时因为需要 5 小时建完，所以每小时堆 $\frac{x}{5}$ 块砖。那么 $\frac{x}{9} + \frac{x}{10} - \frac{x}{5} = 10$ ，解得， $x = 900$ ，选 B。

Problem 19

考点：几何（立体几何+平面几何）

解答：



圆柱的一端如上图所示，其中 AB 表示水面，则水深 $HM=2$ ，因为半径 $OM=4$ ，则 $OH=2$ 。因为直角 $\triangle AOH$ 中， $AO=4$ ，那么 $\angle A=30^\circ$ ， $\angle AOH=60^\circ$ 。因此 $\angle AOB=120^\circ$ 。则扇形 OAMB 的面积为 $\frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 = \frac{16}{3}\pi$ ，而 $\triangle AOB$ 面积为

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$, 所以月牙形 AMB 的面积为 $\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$. 那么水的体积为 $(\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}) \times 9 = 48\pi - 36\sqrt{3}$, 选 E.

Problem 20

考点: 概率 (分类讨论)

解答: 扔这 2 个骰子, 得到的所有可能性是 $6 \times 6 = 36$ 种。下面计算和为 5, 7 或 9 的所有可能性。

- ①若第一个骰子的数字是 1, 则第二个只能是 4, 6 或 8, 有 3 种可能性。
- ②若第一个骰子的数字是 2 (注意: 有两个 2), 则第二个只能是 3, 5, 有 $2 \times 2 = 4$ 种可能性。
- ③若第一个骰子的数字是 3 (注意: 有两个 3), 则第二个只能是 4, 6, 有 $2 \times 2 = 4$ 种可能性。
- ④若第一个骰子的数字是 4, 则第二个只能是 1, 3, 5, 有 3 种可能性。

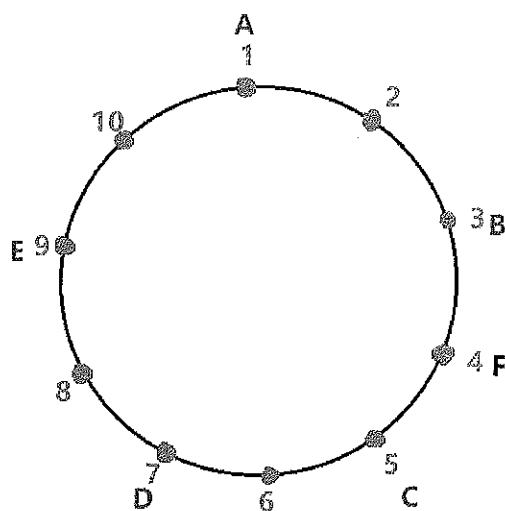
因此总共有 $3+4+4+3=14$ 种可能性。那么概率为 $P = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$, 选 B.

Problem 21

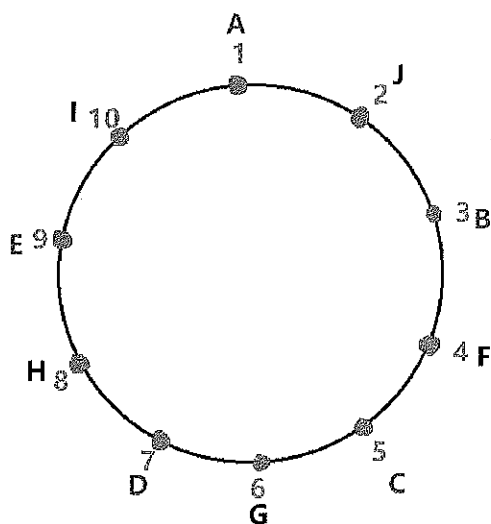
考点: 排列组合

解答: 假设 A, B, C, D, E 是男士, 分别以 F, G, H, I, J 这 5 个女士为配偶。

因为男女间隔而坐, 因此男的只能坐到编号 1, 3, 5, 7, 9 或 2, 4, 6, 8, 10 的座位上, 2 种坐法。如坐到编号为 1, 3, 5, 7, 9 的位置上, 则还有 $5!$ 种安排座位的方法。如下图是男士的一种可能的坐法:



此时 A 的配偶 F 只能安排到编号为 4 或 8 的位置，有 2 种方法。例如 F 安排到座位 4 上。则此时剩下的所有空位只有一种安排方法。理由如下：8 这个位置只能 C 的配偶 H，接着 2 这个位置本来只能安排 C 或 E 的配偶，但 C 的配有已经安排了，那么只能安排 E 的配偶 J。6 的位置本来只能安排 B 或 E 的配偶，但 E 的配偶 J 已经安排，所以 6 只能坐 B 的配偶 G，最后剩下的 10 位置只能坐 D 的配偶 I。



综上，总共 $2 \times 5 \times 2 = 480$ 种坐法，选 C。

Problem 22

考点: 概率(插空法)

关键思路解析: 题目要求颜色相同的不能相邻. 先安排 3 个红色, 如下图, 形成 4 个空.

—R—R—R—

红色不能相邻, 所以中间两个空位一定要被其它颜色占满. 中间两个位置的填充情况分 2 种情况.

① 2 白 1 蓝全部放在中间 2 个位置. 则白色肯定是中间 2 个位置各放 1 个, 只有 1 种方法, 而蓝色 2 个位置选择其一, 有 2 种方法, 并且放白色左边还是右边, 也有 2 种方法, 所以总共 4 种方法.

② 中间 2 位只放了 2 个珠子. 若中间 2 位同色, 1 种方法, 同时 1 个蓝色可放最左或最右空位, 2 种方法, 所以共 2 种方法; 若中间不同色, 有 $2!$ 种方法, 剩下 1 个白色可放最左或最右空位, 2 种方法, 所以共 $2 \times 2 = 4$ 种方法. 因此, 中间 2 位只放了 2 个珠子总共 6 种方法.

综上, 有 10 种可能使得相邻珠子不同色. 而把 3 红, 2 白, 1 蓝排成一排, 是个带有重复的排列, 总共有 $\frac{6!}{3!2!} = 60$. 所以概率为 $P=1/6$.

解答: $P=1/6$

Problem 23

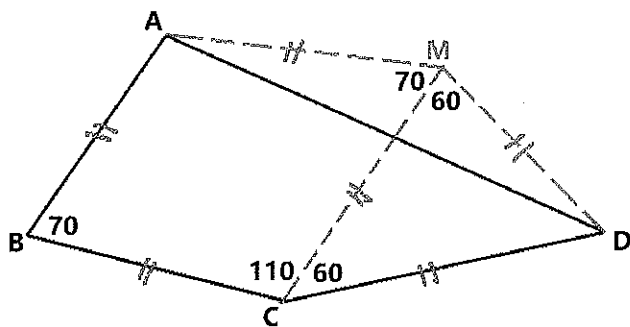
考点: 不定方程(SFFT)

解答: 由题意, 画家所画的长方形长为 $a-2$, 宽为 $b-2$, 且面积为地板的一半, 即 $(a-2)(b-2) = \frac{1}{2}ab$, 化简得, $ab-4a-4b+8=0$, 即 $(a-4)(b-4)=8$, 而因为 a 和 b 均为正整数且 $b > a$, 所以 $(a-4)(b-4)=1 \times 8 = 2 \times 4$, 则 $a=5, b=12$ 或 $a=6, b=8$. 共 2 对, 选 B.

Problem 24

考点: 平面几何

解答:

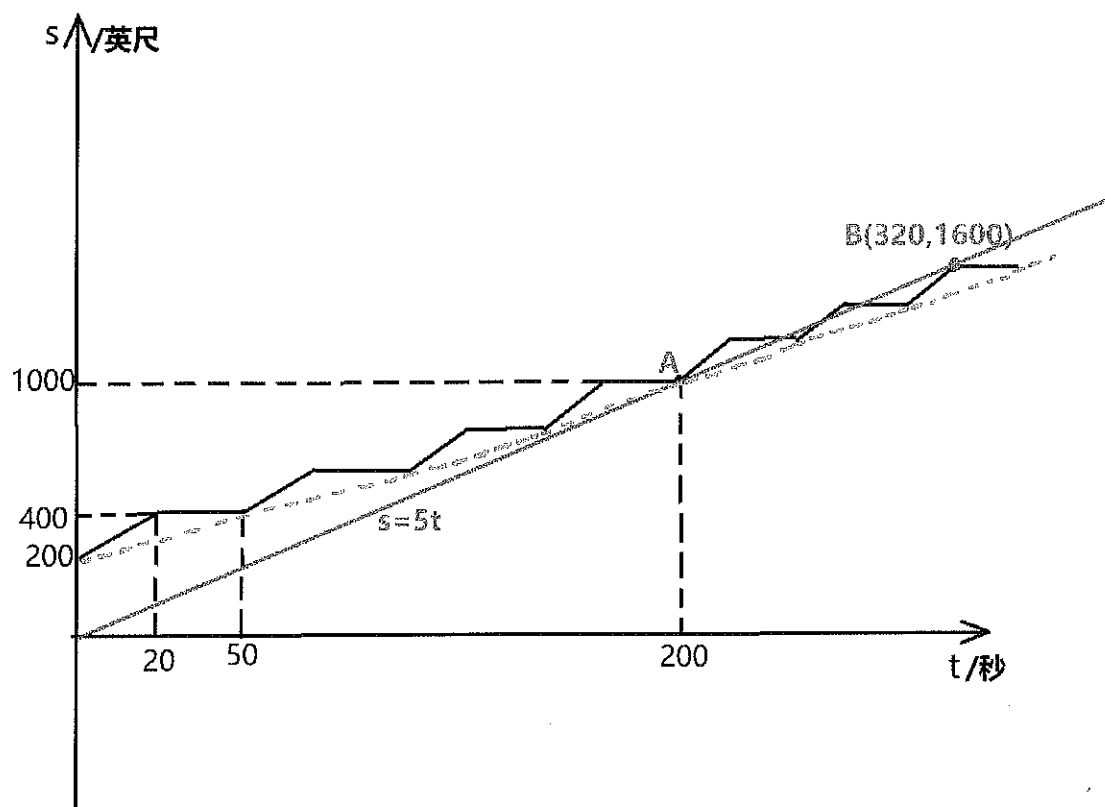


因为 $AB = BC = CD$ 这三根线段位置分散, 因此我们为了利用这个条件, 需要把它们通过平移集中起来。因此将 AB 平移到 CM 。那么 $ABCM$ 就是个平行四边形, 连接 AM, DM 。则 $\angle BCM = 110^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$ 。又因为 $CM = CD$, 因此 $\triangle MCD$ 是个等边三角形。所以 $\angle CMD = 60^\circ$, $DM = CM = BC$ 。因为 $AM = BC$, $\angle AMC = \angle B = 70^\circ$, 所以 $AM = DM$, $\triangle AMD$ 是个顶角为 130° 的等腰三角形, 那么 $\angle MAD = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$ 。而因为 $\angle BAM = \angle BCM = 110^\circ$, 所以 $\angle BAD = 110^\circ - 25^\circ = 85^\circ$ 。选 C。

Problem 25

考点:数形结合

解答:



我们建立上述直角坐标系。以 Michael 刚经过某个垃圾桶时的时间为初始时间，此时的地点为起点。则 Michael 的路程和时间的关系为 $s = 5t$ ，是一条通过原点的直线。而卡车从距离起点 200 英尺的地方开始行使，且每行驶 20 秒就停留 30 秒，因此卡车的路程时间图像如上图折线表示。我们只需要知道直线和折线的交点的个数，即为 Michael 和卡车相遇的次数。

由于折线和直线相交的具体位置不太好确定，我们可以先用一条折线来近似折线。如图中连接折线最低点的虚线，它的方程容易求得为： $s = 4t + 200$ ，与 $s = 5t$ 联立，求得交点为 $t = 200, s = 1000$ ，即图中 $A(200, 1000)$ ，表示 Michael 与卡车第一次相遇。

由于直线 $s = 5t$ 恰好过折线上某个峰值点 $B(320, 1600)$, 因此从图上可以看到, 直线与折线总共有 5 个交点, 那么 Michael 与卡车总共相遇 5 次。选 B。