

2009 AMC10A 解答

Problem 1

考点:比例

解答: 需要的罐子数为 $\frac{128}{12} = 10\frac{2}{3}$, 因此最少是 11 罐。选 E。

Problem 2

考点:算术

解答: 对于选项 A, 要凑成 15 分, 15 是 5 的倍数, 而出了 1 分外, 其他每种硬币面值都是 5 的倍数, 因此这 4 枚硬币不可能选到 1 分。而如果 4 枚硬币都选 5 分, 最低也是 20 分, 不会得到 15 分。因此 A 是不可能的。

对于 B, 若选 5, 5, 5, 10, 可以凑成 25 分。对于 C, 若选 10, 10, 10, 5, 则凑成 35 分。

对于 D, 若选 5, 5, 10, 25, 则凑成 45 分。对于 E, 若选 10, 10, 10, 25, 则凑成 55 分。

因此, 选 A。

Problem 3

考点: 算术

解答:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} \\ &= 1 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

答案选 C.

Problem 4

考点: 行程问题 (平均速度)

解答:

他游泳需要 $2\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ 小时, 跑步需要 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 小时, 所以他用于骑自行车的时间为

$2 - \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$ 小时, 因为总共骑行 15 英里, 因此他的平均速度为

$$\frac{15}{\frac{11}{8}} = \frac{120 \text{ miles}}{11 \text{ hour}} \rightarrow \boxed{A}$$

Problem 5

考点: 算术

解答:

$$\begin{array}{r} 111111111 \\ \times \\ 111111111 \\ \hline 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ \dots \\ 111111111 \\ \hline 12345678987654321 \end{array}$$

相乘的过程如上, 结果为 12345678987654321, 因此各个位上数字之和为

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1=81, \text{ 选 E.}$$

Problem 6

考点: 平面几何

解答: 半圆半径等于小圆直径, 为 4, 所以半圆面积是 $\frac{1}{2}(16\pi) \Rightarrow 8\pi$. 而小圆面

积是 4π , 所以小圆面积占了半圆面积的 $\frac{4\pi}{8\pi} = \frac{1}{2}$, 那么阴影部分占了半圆面积

的 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 答案选 $\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\text{A}}$ 。

Problem 7

考点: 百分数

解答: 假设一盒牛奶的量为 x , 全脂牛奶的脂肪含量的百分比为 $p\%$, 因此

$$x \cdot p\% \cdot (1 - 40\%) = x \cdot 2\%, \text{ 解得, } p = \frac{10}{3}, \text{ 选 C.}$$

Problem 8

考点: 百分数

解答: 因为老年票降价 25% 后是 6 元, 因此票的原价是 $\frac{6}{75\%} = 8$ 元。那么儿童票

一张需要 4 元。因此总共需要支付 $2 \times (4 + 8 + 6) = 36$ 元, 选 B。

Problem 9

考点: 等比数列

解答: 因为 $a, b, 2009$ 成等比数列, 所以 $a \cdot 2009 = b^2$, 即 $a \cdot 7^2 \cdot 41 = b^2$, 所以

$a = 41m^2$, $b = 41 \cdot 7 \cdot m$, 那么公比为 $r = \frac{7}{m}$ 。因为 $r > 1$, 且是个整数, 所以 $m = 1$, 此

时 $a = 41$, 选 B。

Problem 10

考点: 平面几何 (相似三角形)

解答: 由射影定理, $BD^2 = AD \times CD = 12$, 所以 $BD = 2\sqrt{3}$, 那么

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 7 \times 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}, \text{ 选 B。}$$

Problem 11

考点: 立体几何

解答: 假设原来正方体的棱长为 x , 则 $(x+1)(x-1)x = x^3 - 5$, 解得, $x = 5$, 因此原

来正方体的体积为 125, 选 D。

Problem 12

考点: 平面几何 (三角形内的不等式)

解答: 在 $\triangle BCD$ 中, $BC - CD < BD < BC + CD$, 即 $12 < BD < 22$ 。在 $\triangle ABD$ 中,

$AD - AB < BD < AB + AD$, 即 $4 < BD < 14$, 因此 $12 < BD < 14$, 而 BD 是个整数,

$BD = 13$, 选 C。

Problem 13

考点: 代数 (指数)

解答: $12^{mn} = (3 \cdot 2^2)^{mn} = 3^{mn} \cdot 2^{2mn} = Q^m \cdot P^{2n}$, 选 E。

Problem 14

考点:平面几何

解答:假设矩形长边长度为 x , 短边长度为 1, 则大的正方形的边长为 $x+1$, 小的正方形边长为 $x-1$. 那么 $(x+1)^2 = 4(x-1)^2$, 化简得, $3x^2 - 10x + 3 = 0$, 解得, $(3x-1)(x-3) = 0$, $x = 3$, 因此长边和短边的比值是 3. 选 A。

Problem 15

考点:数列

解答: 题目描述的是一个递推关系: $F_n = F_{n-1} + 4(n-1)$, 所以, $F_2 = F_1 + 4 \cdot 1$, $F_3 = F_2 + 4 \cdot 2$, $F_4 = F_3 + 4 \cdot 3$, ..., $F_{20} = F_{19} + 4 \cdot 19$. 全部相加, 得到, $F_{20} = F_1 + 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 19) = 1 + 4 \cdot 190 = 761$, 选 E

Problem 16

考点: 代数

解答: $a-b = \pm 2, b-c = \pm 3, c-d = \pm 4$, 则 3 个方程相加, 得到,

$$a-d = 2+3\pm 4 = 1 \text{ 或 } 9$$

$$a-d = 2-3\pm 4 = 3 \text{ 或 } -5$$

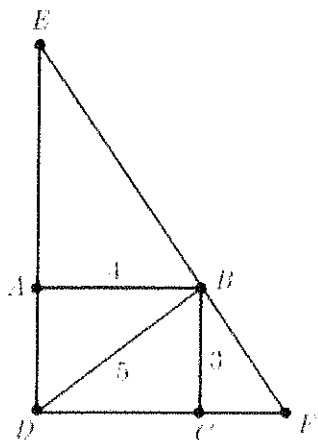
$$a-d = -2+3\pm 4 = 5 \text{ 或 } -3$$

$$a-d = -2-3\pm 4 = -1 \text{ 或 } -9$$

因此 $|a-d| = 1, 3, 5, 9$, 和为 18, 选 D。

Problem 17

考点: 平面几何 (相似三角形)



关键思路解析: 若我们能求出 BF 的长度, 那么根据射影定理, $BD^2 = BE \cdot BF$, 可以得到 BE 的长度. BF 的长度可以放在直角三角形 BDF 中再次用射影定理得到.

解答: 先求出 BF 的长度. 在直角三角形 BDF 中, $BC \perp DF$, 所以 $BD^2 = DC \cdot DF$

即, $5^2 = 4 \cdot DF$, $DF = \frac{25}{4}$, $CF = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$, 因此

$$FB^2 = FC \cdot FD = \frac{9}{4} \times \frac{25}{4} \rightarrow FB = \frac{15}{4}.$$

由射影定理, $EB = \frac{BD^2}{FB} = 25 \times \frac{4}{15} = \frac{20}{3}$, 所以, $EF = EB + FB = \frac{20}{3} + \frac{15}{4} = \frac{125}{12}$

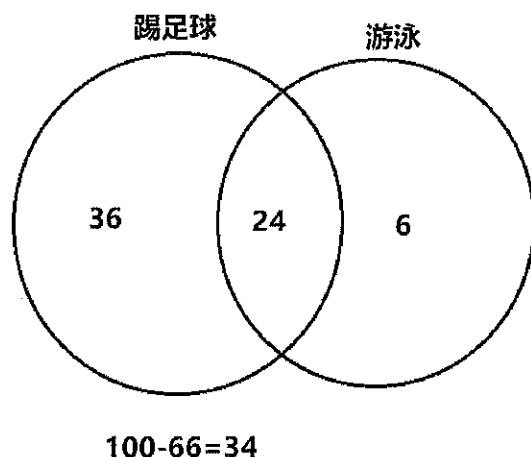
Answer : C

Problem 18

考点: 文氏图

解答: 假设夏令营共 100 个孩子, 则 60 个孩子踢足球, 30 个孩子游泳, 且有

$60 \times 40\% = 24$ 人既游泳又踢足球。得到如下文氏图:



有 34 人既不游泳也不踢足球。从图中可以看到，不游泳的人有 $36+34=70$ 人，其中 36 人踢足球，所以所占的百分数为 $\frac{36}{70} \approx 51\%$ ，选 D。

Problem 19

考点：平面几何+数论（因子个数定理）

解答：因为滚动前和滚动后这 2 个圆仍相切于同一点，则表示圆 A 的周长是圆 B 周长的整数倍，即 $2\pi \cdot 100 = n \cdot 2\pi r$ ，即 $100 = nr$ ，表明 r 是 100 的因子，且 $r < 100$ 。因为 $100 = 2^2 \times 5^2$ ，根据因子个数定理，100 的正因子共 9 个，而 r 不能取 100，所以 r 的可能值是 8 个，选 B。

Problem 20

考点：代数（列方程解应用题）

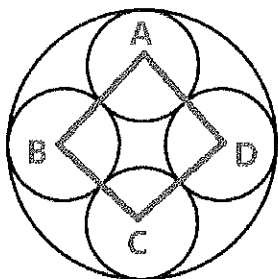
解答：因为她们间的距离每分钟减少 1 公里，表明她们俩的速度和为 1 公里每分钟，而 Andrea 的速度是 Lauren 的 3 倍，因此 Andrea 的速度为 $\frac{3}{4}$ km/min，Lauren 的速度为 $\frac{1}{4}$ km/min. 假设她们出发后 x 分钟 Lauren 和 Andrea 相遇，则

$$\frac{1}{4}(x) + \frac{3}{4}(5) = 20, \text{ 解得, } x = 65, \text{ 选 D.}$$

Problem 21

考点:平面几何

解答:



连接这4个小圆的圆心形成四边形ABCD。加上小圆的半径为1, 因为 $AB=BC=CD=DA=2$, 因此ABCD是个菱形。根据对称性, 对角线 $AC=BD$, 则菱形ABCD是个正方形, 那么 $AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$, 所以大圆的直径为 $D=AC+2=2\sqrt{2}+2$, 大圆半径为 $R=\sqrt{2}+1$, 因此4个小圆的面积和与大圆的面积之比为 $\frac{4 \cdot \pi \cdot 1^2}{\pi(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{4}{3+2\sqrt{2}} = 4(3-2\sqrt{2})$, 选C。

Problem 22

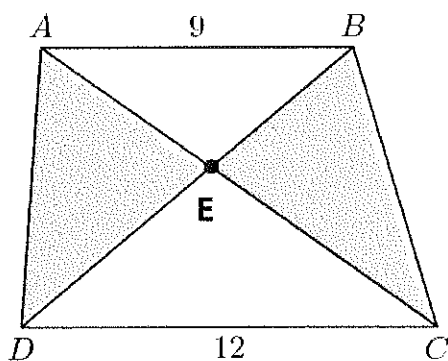
考点: 概率

解答: 此问题可以等效成, 从包中12个数字里选择2个数字, 问这2个数字之和为7的概率是多少? 从12个数字里选择2个数字, 总共方法数为: $C_{12}^2=66$ 。而选择的这2个数可能是1和6, 或2和5, 或3和4这3种情况, 每种情况的方法数一样。例如选择的是1和6这2个数字。因为包中有2个1, 选择其中一个1有2种方法, 同样, 选择其中一个6也有2种方法。那么选择的2个数和为7的方法数为 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 种方法。因此概率为 $P = \frac{12}{66} = \frac{2}{11}$ 。选D

Problem 23

考点：平面几何

关键思路解析：



这里根据 $\triangle AED$ 和 $\triangle BEC$ 的面积相等，可以得到 $AB \parallel CD$ ，因为

$S_{\triangle ADE} + S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle ABE}$ ，即 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC}$ ，而这2个三角形有同一条底边，所以高也相等，表明 $AB \parallel CD$ 。有了平行后，就有相似，那么后面运用相似就能解出AE了。

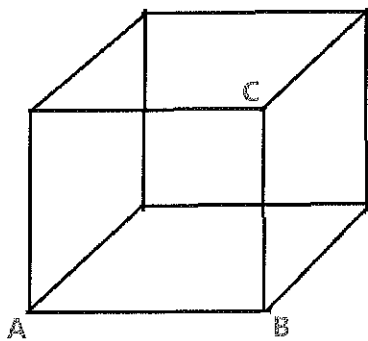
解答：因为 $AB \parallel CD$ ， $\frac{AE}{CE} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ，所以， $AE = 14 \times \frac{3}{7} = 6$

Answer : E

Problem 24

考点：概率

解答：



只要选择的 3 个点不是如图所示的位于正方体某个面内的 3 个点, 那么这 3 点所确定的平面一定通过正方体内部的点。选择正方体某个面内的 3 个点的方法数为 $C_4^3 = 4$, 而正方体共有 6 个面, 所以所有的反面情况数是 $4 \times 6 = 24$ 种。而从 8 个顶点中选择 3 个顶点的方法数为 $C_8^3 = 56$, 因此符合题意要求的正面情况数为 $56 - 24 = 32$ 种。概率为 $P = \frac{32}{56} = \frac{4}{7}$, 选 C。

Problem 25

考点:数论 (质因数分解)

关键思路解析: $N(k)$ 是关于 k 的一个函数(function), 所以需要先根据 I_k 得到 $N(k)$ 的表达式, 再观察 k 取何值时 $N(k)$ 能得最大值。

解答: $I_k = 10^{k+2} + 2^6$. 若 $k \geq 4$, 则 $I_k = 10^{k+2} + 2^6 = 2^6(2^{k-4}5^{k+2} + 1)$. 若 $k > 4$, 则括号内是一个奇数(odd number), 那么 I_k 最多只有 6 个 2. 而如果 $k=4$, 那么括号内为 $5^6 + 1$, 这是一个偶数(even number), 会至少再贡献一个 2. 因为 $5^6 + 1 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod{4}$, 所以 $5^6 + 1$ 只有一个 2. 因此总共 7 个 2.

Answer : B