

2009 AMC10B 解答

Problem 1

考点: 数论 (不定方程)

解答: 假设买了 $x(x=0,1,2,3,4,5)$ 个白百吉饼, 则她买了 $5-x$ 个松饼, 因此总花费为 $T = 0.5(5-x) + 0.75(x) = 0.25x + 2.5$ 。将 $x=0,1,2,3,4,5$ 分别代入 T , 发现只有当 $x=2$ 时, $T=3$ 是个整数。因此她买了 2 个百吉饼, 选 B。

Problem 2

考点: 算术

解答:
$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{12} - \frac{3}{12}}{\frac{6}{12} - \frac{4}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{12}} = \boxed{(C) \frac{1}{2}}$$

Problem 3

考点: 比例

解答: 假设用了 x 罐油漆粉刷 25 个房间, 由比例关系, $\frac{3}{5} = \frac{x}{25}$, $x=15$, 选 C。

Problem 4

考点: 比例

解答: 容易求得, 等腰直角三角形的直角边长为 $(25-15)/2=5$, 因此 2 个花床的面积之和为 25, 而院子总面积为 $5 \times 25=125$, 所以花床所占比例为 $\frac{25}{125} = \frac{1}{5}$, 选 C。

Problem 5

考点: 百分数

解答: 比 60 少 20% 的数是 $60(1-20\%)=48$ 。假设要求的这个数是 x , $x(1+\frac{1}{3})=48$,
 $x=36$, 选 D。

Problem 6

考点: 数论 (质因数分解)

解答: 需要将 128 写成 3 个正整数相乘, 其中 2 个数相同, 并且都比第三个数大, 因此 $128=8\times 8\times 2$, 因此他们三人的年龄为 2, 8 和 8, 他们的年龄和为 18, 选 D。

Problem 7

考点: 排列组合

解答: 所有加括号的方式如下:

$$(2 \times 3) + (4 \times 5) = 26,$$

$$(2 \times 3 + 4) \times 5 = 50,$$

$$2 \times (3 + 4 \times 5) = 46,$$

$$2 \times (3 + 4) \times 5 = 70$$

共可以形成 4 种不同的值, 选 C。

Problem 8

考点: 百分数

解答: 令 P 为汽油在一月初的价格, 则 $p(1+20\%)(1-20\%)(1+25\%)(1-x\%)=p$,

$$1.2 \times 0.8 \times 1.25(1-x\%)=1, \quad x=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3} \approx 17, \text{ 选 B。}$$

Problem 9

考点: 平面几何

解答: 假设 $\angle B = 2x^\circ$, 则 $\angle A = \angle ACB = 5x^\circ$, 在 $\triangle ABC$ 中, $2x + 5x + 5x = 180$,

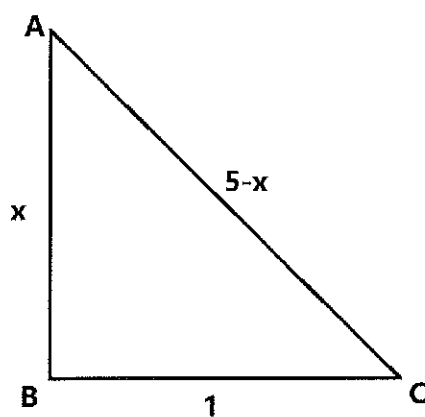
$x = 15$, 因此 $\angle DCE = \angle ACB = 5x = 75^\circ$, 又因为 $CD = CE$, 所以

$$\angle D = \frac{180 - 75}{2} = 52.5^\circ, \text{选 A.}$$

Problem 10

考点: 平面几何 (勾股定理)

解答:



如上图所示, 底座为 B, 折断的点为 A, 顶部接触地面的点为 C。由勾股定理,

$$x^2 + 1 = (5 - x)^2, \text{解得, } x = 2.4, \text{选 E.}$$

Problem 11

考点: 数论 (回环数) + 排列组合

解答: 假设这个 7 位回环数各个位从左向右依次编号为第 1 位, 第 2 位, ..., 第 7 位。则第 1 位和第 7 位的数字相同, 第 2 位和第 6 位的数字相同, 第 3 位和第 5 位的数字相同, 第 4 位可取任何数字。因此需要有 3 对相同的数字。则它们分别是 2 和 2, 3 和 3, 以及 5 和 5。因此第 4 位一定是 5。把 2 和 2, 3 和 3, 以及 5 放到这 3 对数位上, 是个全排列, 共 $3! = 6$ 种可能, 选 A。

Problem 12

考点: 排列组合

解答: 无论我们如何选择共线的3个点, 三角形的高总是两条平行线间的距离, 保持不变。因此三角形面积的不同在于底边长的不同。而三角形底边的长度只可能是1, 2 或 3, 所以总共有3种三角形的面积, 选 (A) 3。

Problem 13

考点: 数列 + 数论 (余数)

解答: 可以看到, A点最初与原点重合, 它下一次碰到的x轴上的点是 $x = 3 + 4 + 6 + 3 + 7 = 23$, 实际上, A点碰到的x轴上的点成等差数列, 首项 $x_0 = 0$, 公差为23, 则第n项为 $x_n = n \times 23$, 当 $n = 87$, $x_n = (87) \times 23 = 2001$, 即五边形ABCDE滚了87圈后, A点与2001重合, B点与2004重合, C点与2008重合, D点与2014重合, 因此边CD碰到 $x = 2009$, 选C。

Problem 14

考点: 等比数列

解答:

方法1:

为了方便书写, 这里的重量单位都默认是夸脱。假设第n天还剩下小米的重量为 a_n , 则第n+1天, 当Millie刚放完重量为1的种子, 喂食器里小米的总重为 $a_n + \frac{1}{4}$, 而种子的总重为 $a_n + 1$, 题目要求 $a_n + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}(1 + a_n)$, 解得, $a_n > \frac{1}{2}$ 。下面我们寻求 a_n 和 n 的关系, 从而建立关于 n 的不等式。

第 $n+1$ 天, 当鸟吃掉小米的 $\frac{1}{4}$, 还剩余小米的重量为 $\frac{3}{4}(a_n + \frac{1}{4})$, 则 $a_{n+1} = \frac{3}{4}(a_n + \frac{1}{4})$,

假设这个递推式可以化为 $a_{n+1} + \lambda = \frac{3}{4}(a_n + \lambda)$, 则 $-\frac{1}{4}\lambda = \frac{3}{16}$, $\lambda = -\frac{3}{4}$, 因此

$a_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(a_n - \frac{3}{4})$, 看到数列 $\{a_n - \frac{3}{4}\}$ 是个公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列, 且

$a_1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{9}{16}$, 所以, $a_n - \frac{3}{4} = -\frac{9}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, 那么 $a_n = -\frac{9}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$,

则 $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{4}{9}$, $n \geq 4$, n 最小为 4, 那么第 5 天 (即周五) 刚开始, 当 Millie 刚

放完重量为 1 的种子, 喂食器里一半以上是小米, 答案选 D。

方法 2:

在周一, 第 1 天, 在 Millie 放完种子后, 鸟发现喂食器里有 $\frac{1}{4}$ 夸脱的小米。在周

二, 在放完种子后, 鸟发现喂食器有 $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$ 夸脱的小米。在周三, 即第 3 天,

它们发现喂食器里有 $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$ 夸脱的种子。则在第 n 天, 在放完种子后, 它们发现喂食器里有

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(\frac{1}{4})(1 - (\frac{3}{4})^n)}{1 - \frac{3}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{夸脱的}$$

种子。因为在第 n 天, 在 Millie 刚放完种子后, 喂食器里有 $\frac{3}{4}$ 夸脱的其他种子,

而要求小米超过一半, 则小米量需大于 $\frac{3}{4}$ 夸脱, 即 $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > \frac{3}{4}$, 即

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{4}。 \text{因为 } \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} > \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} < \frac{1}{4}, \text{ 则是在第 5 天}$$

发生, 即周五。因此答案为 (D)。

Problem 15

考点：代数（解方程）

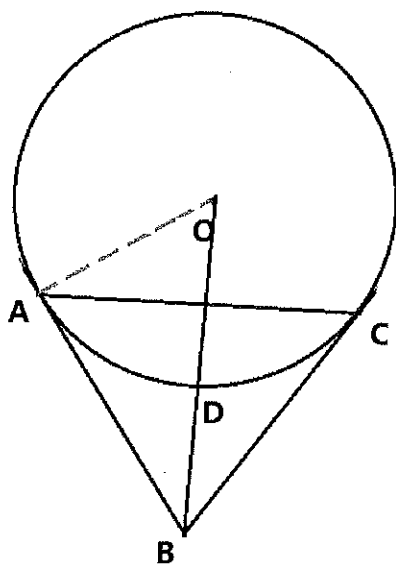
解答：设空桶中 x 千克，装满水时水重 y 千克，则 $x + \frac{2}{3}y = a$ ，以及 $x + \frac{1}{2}y = b$ ，

解得， $\begin{cases} y = 6(a-b) \\ x = 4b - 3a \end{cases}$ ，那么装满水时，水和桶的总重为 $x + y = 3a - 2b$ ，选 E。

Problem 16

考点：平面几何

解答：

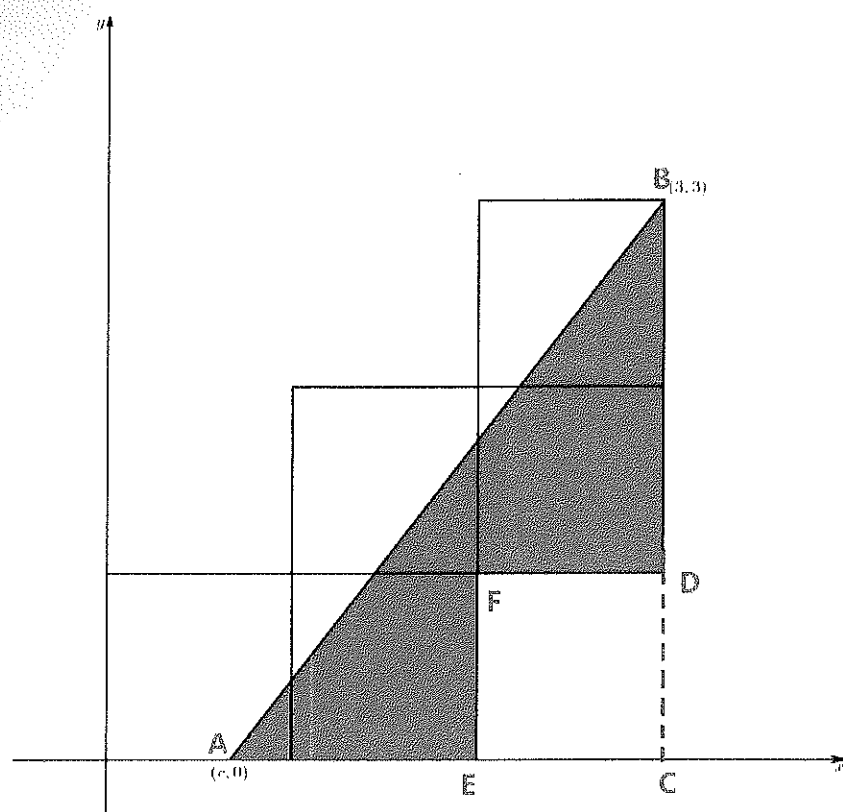


设圆的半径 $R=1$ ，因为三角形 ABC 为等边三角形，则 $\angle ABC = 60^\circ$ ，那么 $\angle ABO = 30^\circ$ ，在直角 $\triangle ABO$ 中，因为 $AO=1$ ，所以， $BO=2$ ，所以 $BD=BO-DO=2-1=1$ ，因此 $\frac{BD}{BO} = \frac{1}{2}$ ，选 B。

Problem 17

考点：平面几何

解答:



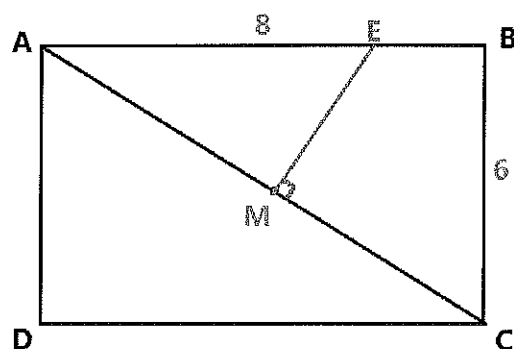
如上图所示, 延长 BD 交 x 轴于 C 点, 则阴影部分的面积

$$S = S_{\triangle ABC} - S_{DFEC} = \frac{1}{2} \cdot (3-c) \cdot 3 - 1 = \frac{5}{2}, \text{ 解得, } c = \frac{2}{3}, \text{ 选 C.}$$

Problem 18

考点: 平面几何 (相似三角形)

解答:



因为直角 $\triangle ABC$ 中, $AB=8$, $BC=6$, 则 $AC=10$, $AM=5$. 因为 $\triangle AME \sim \triangle ABC$,

所以 $\frac{ME}{AM} = \frac{BC}{AB}$, 即 $\frac{ME}{5} = \frac{6}{8}$, 则 $ME = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$, 那么

$$S_{\triangle AME} = \frac{1}{2} AM \times ME = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{15}{4} = \frac{75}{8}, \text{选 D.}$$

Problem 19

考点: 代数

解答: 我们只需关心 1-12 小时内这一个循环即可。其中时间为 1 点, 10 点, 11 点, 12 点这 4 个小时均显示不正确, 另外其他每个小时 (共 $12-4=8$ 小时) 内, 例如 2 点, 显示不正确的有 2:01, 2:10~2:19, 2:21, 2:31, 2:41, 2:51 共 15 分钟。因此 12 小时内显示不正确的分钟数为 $4 \times 60 + 8 \times 15 = 360$ 分钟, 而 12 小时总共 720 分钟, 因此显示正确的有 360 分钟, 那么占了总时间的 $\frac{1}{2}$, 选 A。

Problem 20

考点: 平面几何

解答: 由勾股定理, 得, $AC = \sqrt{5}$. 由角平分线定理, $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 所以

$$BD = \frac{1}{\sqrt{5}+1} BC = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \cdot 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{选 B.}$$

Problem 21

考点: 数论 (模运算)

解答: 这是一道等比数列和数论结合的题目. 先求出等比数列前 2010 项之和, 为

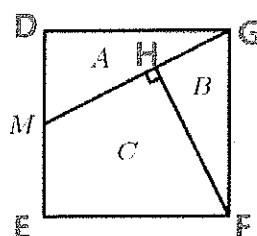
$$\frac{1-3^{2010}}{1-3} = \frac{3^{2010}-1}{2} = \frac{(8+1)^{1005}-1}{2} = \frac{8^{1005} + \dots + C_{1005}^2 \cdot 8^2 + C_{1005}^1 \cdot 8}{2} \equiv 1005 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{8}$$

Answer: D

Problem 22

考点: 平面几何

解答:



因为直角 $\triangle DGM$ 中, $DG=2, DM=1$, 则 $GM=\sqrt{5}$ 。由 $\triangle DGM \sim \triangle HFG$, 得,

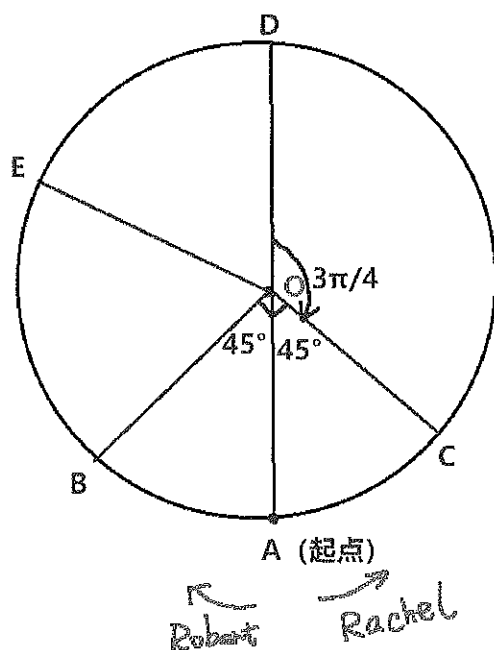
$$\frac{S_{\triangle HFG}}{S_{\triangle DGM}} = \left(\frac{GF}{GM}\right)^2, \text{ 即 } \frac{S_{\triangle HFG}}{1} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2, \text{ 因此 } S_{\triangle HFG} = \frac{4}{5}, \text{ 则 } s = \frac{4}{5} + 4 = \frac{24}{5}。 \text{ 因为}$$

个底面为 B 的三棱柱, 所以体积 $c = S_{\triangle HFG} \cdot 2 = \frac{8}{5}$ 。 $c + s = \frac{32}{5}$, 选 B。

Problem 23

考点: 几何概率

解答:



如上图, A 点为起点, 劣弧 BC 即为在相片中出现的四分之一跑道。开跑后第 10 分钟, Robert 跑的圈数为 $\frac{600}{80} = \frac{15}{2} = 7.5$ 圈, 因此出现在 D 点。因为 $\angle DOC = \frac{3}{4}\pi$, 容易算的, 在 10 分钟 30 秒时, Robert 位于 C 点, 而在 10 分钟 50 秒时, 位于 B 点, 因此是在 10 分钟 30 秒到 10 分钟 50 秒之间时, Robert 出现在相片内。

开跑后 10 分钟, Rachel 跑的圈数为 $\frac{600}{90} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ 圈, 意味着在第 10 分钟, Rachel 出现在 E 点, 其中 $\angle EOA = \frac{2\pi}{3}$ 。那么 $\angle EOB = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$, 从 E 跑到 B 需要 $\frac{90}{2\pi} \times \frac{5\pi}{12} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$ 秒, 所以在 10 分钟 $18\frac{3}{4}$ 秒位于 B 点。从 B 跑到 C, 需要 $\frac{90}{2\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{90}{4} = 22\frac{1}{2}$ 秒, 所以是在 10 分钟 $41\frac{1}{4}$ 秒位于 C 点, 因此 Rachel 是在 10 分钟 $18\frac{3}{4}$ 秒到 10 分钟 $41\frac{1}{4}$ 秒之间时, 出现在相片内。

综上, 2 个人同时出现在相片内是在 10 分钟 30 秒到 10 分钟 $41\frac{1}{4}$ 秒这段时间内,

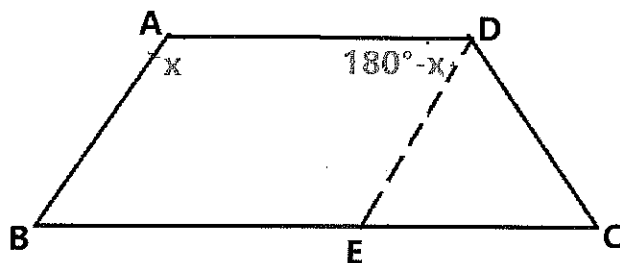
共持续 $11\frac{1}{4} = \frac{45}{4}$ 秒。而第 10 分钟到第 11 分钟总共 60 秒, 则概率为 $P = \frac{\frac{45}{4}}{60} = \frac{3}{16}$,

选 C。

Problem 24

考点: 平面几何

解答:



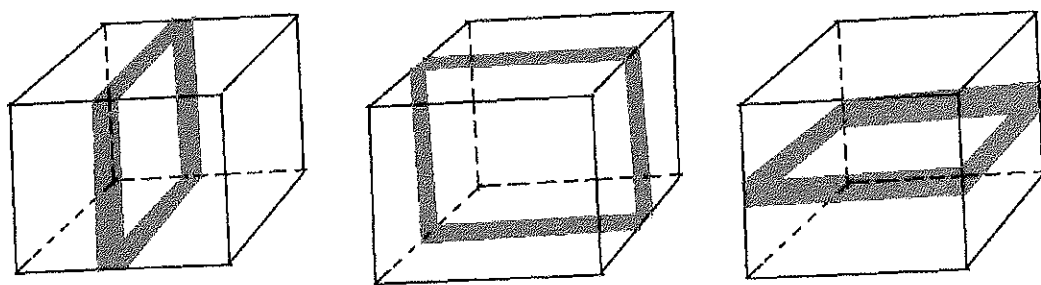
上图所示为其中一个等腰梯形, $\angle A = x$, 所以 $\angle ADE = 180^\circ - x$, 那么 $\angle CDE = x - (180^\circ - x) = 2x - 180^\circ$. 这表明, 等腰梯形的一条侧边相对于另一条侧

边向一个方向旋转 $2x-180^\circ$ 。而从原来的拱形门可以看到, 这样的旋转角度经过 9 次叠加后, 总共旋转了 180° , 即 $9(2x-180^\circ)=180^\circ$, 解得, $x=100^\circ$, 选 A.

Problem 25

考点: 概率

解析:



如上图, 满足题目要求的有 3 种条纹. 而对于每一种其他 2 个面可以任意画, 每个面有 2 种画法. 所以总共有 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 种可能性的画法符合要求. 而不考虑要求的总的画法有 2^6 个 (因为 6 个面上每个面有 2 种画法), 因此概率就能求出来了.

解答: 概率为 $P = \frac{12}{2^6} = \frac{3}{16}$, 选 B