

2010 AMC10A 解答

Problem 1

考点：算术

解答：将 5 本书的宽度 $6, \frac{1}{2}, 1, 2.5$, 和 10 相加，得到总和为 20. 因为共 5 本书，

因此平均宽度为 $\frac{20}{5} = 4$ ，答案选 $\boxed{D}$ 。

Problem 2

考点：平面几何

解答：假设小正方形的边长为 1，则大正方形边长为 4，矩形的长也是 4，而矩形的宽加上一个小正方形的边长 1 恰好等于大正方形边长 4，则矩形的宽为 3，因此矩形的长和宽之比为 4:3. 选 B。

Problem 3

考点：代数（列方程解应用题）

解答：设 Tyrone 给出了 x 颗玻璃球，则 $97 - x = 2 \cdot (11 + x)$ ，解得， $x = 25$ 。

选 $\boxed{D}$

Problem 4

考点：算术

解答：假设每张光盘都容纳最大读取时间 56 分钟，则需要 $412/56 = 7.357$ 张光盘。但是因为光盘的个数只能是整数，因此至少需要 8 张光盘，那么每张光盘的读取时间为 $412/8 = 51.5$ 分钟，选 $\boxed{B}$

Problem 5

考点：平面几何（圆）

解答：若圆的周长为 24π ，那么半径为12。因为圆的面积公式为 πr^2 ，则面积是 144π ，选 E。

Problem 6

考点：算术

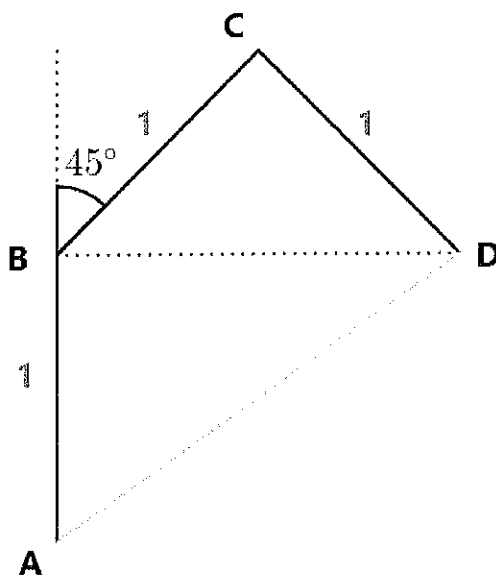
解答： $\spadesuit(2, 2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。所以， $\spadesuit(2, \frac{3}{2})$ 等于 $2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ，

答案选 C

Problem 7

考点：平面几何（勾股定理）

解答：



如上图所示, Crystal 先从 A 点朝北跑 1 英里到 B 点, 然后从 B 点沿着东北方向跑 1 英里到 C 点, 再从 C 点沿着东南方向跑 1 英里到 D 点, 最后由 D 沿直线到 A。我们要求的是 AD 的长度。在等腰直角 $\triangle BCD$ 中, $BD = \sqrt{2}$, 再在直角 $\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得, $AD = \sqrt{((\sqrt{2})^2 + 1^2)} = \sqrt{3}$, 因此选 **C**

Problem 8

考点: 代数

解答: 我们先来理解下题意: 因为他的年龄每增加一周岁, 则每小时薪水增加 0.5 美元, 因此若他今年 12 周岁, 并且 6 个月后还是 12 周岁的话, 那么他的时薪是 $0.5 \times 12 = 6$ 美元。那么工作 100 小时获得 600 美元收入; 若他今年 13 周岁, 且 6 个月后还是 13 周岁, 那么他的时薪是 $0.5 \times 13 = 6.5$ 美元, 工作 100 小时获得 650 美元。而实际上他工作 100 小时后所获为 630 美元, 介于 600 和 650 之间, 因此这 6 个月间他从 12 周岁过渡到了 13 周岁, 因此这 6 个月末, 他是 13 周岁, 选 D。

Problem 9

考点: 数论 (回环数)

解答: $x + 32$ 这个 4 位的回环数是由 3 位回环数 x 加 32 得到, 因此回环数 $x + 32$ 的最高位一定是 1, 由此个位也为 1。所以可能是 1001, 1111, 1221, 1331, 等。但要求它减去 32 后的 x 是个 3 位数, 那么只可能是 1001, 因为 $1001 - 32 = 969$, 是个三位数, 而 $1111 - 32 = 1079$, 是个四位数。所以 $x = 969$, 各个位上数字之和为 24。选 E。

Problem 10

考点：数论（余数）

解答：假设从2008年5月27号开始，经过了 x 天后的某个生日是个周六，则有 $2+x \equiv 6(\text{mod } 7)$ ，即 $x \equiv 4(\text{mod } 7)$ 。而我们知道 $365 \equiv 1(\text{mod } 7)$ 。下面依次检查选项。

(A) 选项：经过3个365天，因此 $x = 3 \cdot 365 \equiv 3(\text{mod } 7)$ ，不满足上述要求。

(B) 选项：经过3个365天，1个366天，因此 $x = 3 \cdot 365 + 366 \equiv 3 + 2 \equiv 5(\text{mod } 7)$ ，排除。

(C) 选项：经过4个365天，1个366天，因此 $x = 4 \cdot 365 + 366 \equiv 4 + 2 \equiv 6(\text{mod } 7)$ ，排除。

(D) 选项：经过6个365天，1个366天，因此 $x = 6 \cdot 365 + 366 \equiv 6 + 2 \equiv 1(\text{mod } 7)$ ，排除。

(E) 选项：经过7个365天，2个366天，因此 $x = 7 \cdot 365 + 2 \cdot 366 \equiv 7 + 4 \equiv 4(\text{mod } 7)$ ，符合要求。因此答案选E。

Problem 11

考点：代数（解线性不等式）

解答：对于原不等式， $a \leq 2x + 3 \leq b$ ，两边减去3，得到， $a - 3 \leq 2x \leq b - 3$ 。

两边除以2，得到， $\frac{a-3}{2} \leq x \leq \frac{b-3}{2}$

因为解的区间长度为10，即 $\frac{b-3}{2} - \frac{a-3}{2} = 10$ ，两边乘以2，得，

$$(b-3) - (a-3) = 20$$

化简, 得到, $b - 3 - a + 3 = 20$, $b - a = 20$, 选 20 (D)。

Problem 12

考点: 立体几何 (相似形的体积比和相似比的关系)

解答: 因为相似形的体积比等于相似比的立方, 假设模型塔的高度为 x 米, 因此

$$\frac{100,000}{0.1} = \left(\frac{40}{x}\right)^3, \text{ 解得, } x = 0.4 \text{ 米, 选 C.}$$

Problem 13

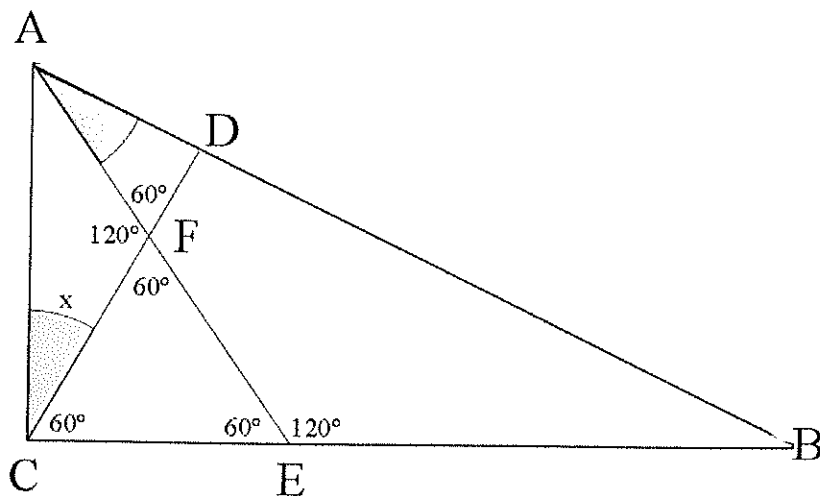
考点: 代数 (列方程解应用题)

解答: 假设停止前的驾驶时间为 t 小时, 那么停止前所行驶的路程为 $80t$, 中间停止了 20 分钟 $= \frac{1}{3}$ 小时, 所以加油后行驶了 $3 - t - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - t$ 小时, 加油后行驶的路程为 $100 \cdot (\frac{8}{3} - t)$ 。因此有 $80t + 100(\frac{8}{3} - t) = 250$ 。选 A。

Problem 14

考点: 平面几何 (特殊直角三角形)

解答:



设 $\angle BAE = \angle ACD = x$ ，所以

$\angle BAC = \angle BAE + \angle CAE = \angle ACD + \angle CAE = \angle AFD = 60^\circ$ ，而在 $\triangle ABC$ 中，又

$AB = 2 \cdot AC$ ，所以 $\triangle ABC$ 是个 $30 - 60 - 90$ 的直角三角形，则 $\angle ACB = 90^\circ$ ，

选 C.

Problem 15

考点：逻辑推理

解答：我们从 Brian 和 Chris 开始，因为他俩的话只涉及他俩。若他俩都是癞蛤蟆，则都说真话，因此他俩又都是青蛙，产生矛盾；若他俩都是青蛙，则都说谎话，因此他俩又都是癞蛤蟆，矛盾。所以他俩必然是一只青蛙，另一只癞蛤蟆。

再看 Brian 和 Mike。若 Brian 是癞蛤蟆，他的话是真的，则 Mike 是青蛙，目前 4 只中有 2 只是青蛙，2 只是蛤蟆，则 Mike 说的话是真的，这就与 Mike 是青蛙的身份相矛盾。因此 Brian 是青蛙，则他的话是假的，那么 Mike 也是青蛙，此时有 3 只青蛙，那么 Mike 说的话是假的，这与 Mike 是青蛙的身份相符。所以有 3 只青蛙，选 D.

Problem 16

考点：平面几何（角平分线定理）

解答：由角平分线定理， $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{8}$ 。因为 AB 和 BC 均为整数，若我们令

$AB = 3, BC = 8$ ，则因为 $AB + BC = AD + DC = AC$ 无法组成三角形。若令

$AB = 6, BC = 16$ ，则能组成三角形（满足三角形边长不等式）。因此最小的周长

为 $6 + 16 + 3 + 8 = \boxed{33}$ ，选 (B)

Problem 17

考点: 立体几何

解答: 先求切掉的立体的体积。贯穿正方体的一个洞是一个底面为 2 英寸×2 英寸, 高为 3 英寸的长方体, 因此体积为 $2 \times 2 \times 3 = 12$ 立方英寸。一共 3 个这样的洞, 因此总体积为 $12 \times 3 = 36$ 立方英寸。这 3 个洞相交形成的棱长为 2 英寸的正方体体积被重复计算了 2 次, 因此实际空心部分体积为 $36 - 2^3 \times 2 = 20$ 立方英寸。那么剩余立体图形的体积为 $3^3 - 20 = 7$ 立方英寸, 选 A.

Problem 18

考点: 概率 (求反面)

解析: Silvia 能选的数字比 Bernardo 少了个 9, 意味着, 只要 Bernardo 选到了 9, 那么无论 Silvia 选什么, 都比 Bernardo 要小, 所以我们需要对 Bernardo 有没有选 9 进行分类讨论. 如果没有选 9, 那么 Bernardo 和 Silvia 是从同一个集合(set)里面选的, 他们一个比另一个大的概率相同, 我们考虑反面情况的概率即可.

解答: 下面分类讨论:

① Bernardo 选了 9, 那么接下来他不论选哪 2 个数字, Silvia 也不论选哪 3 个数字,

都符合题目要求. 所以概率为: $P = \frac{C_8^2}{C_9^3} = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}$

② Bernardo 没选 9, 概率为 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. 此时 Bernardo 和 Silvia 均是从 1-8 中选择 3

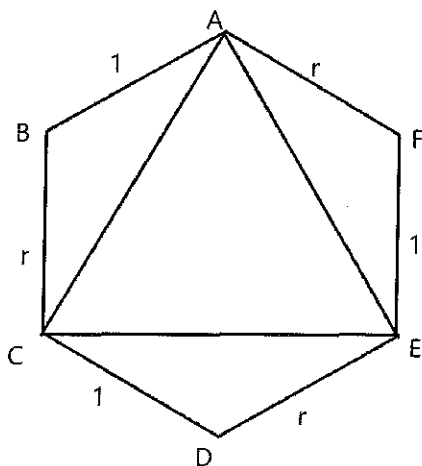
个数字, Bernardo 的数字比 Silvia 的数字大的概率和 Silvia 的数字比 Bernardo 数字大的概率相同. 因此我们算反面, 即他俩数字相等的概率: 首先 Bernardo 从 1-8 中随便选 3 个数字, 概率为 1, 紧接着, Silvia 要选出 3 个数字恰好和 Bernardo

一样, 则概率为 $\frac{1}{C_8^3} = \frac{1}{56}$. 因此第②种情况总的概率为: $P' = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{56}}{2} = \frac{55}{168}$

综上, 总的概率为 $P' = \frac{1}{3} + \frac{55}{168} = \frac{56+55}{168} = \frac{111}{168} = \frac{37}{56}$, 选 B

Problem 19

考点: 平面几何(余弦定理)



关键思路解析: 因为 ABCDEF 各个角都相等, 所以都为 120° . 由此得到

$\triangle ABC \cong \triangle CDE \cong \triangle EFA$, 那么它们各自为整个六边形面积的 10%. $\triangle ABC$ 的面积可以很方便用 r 表示, 正三角形 ACE 的面积也容易用 r 表示, 因为边长 AC 可以放在 $\triangle ABC$ 中用余弦定理得到. 根据 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle AEC} = 1:7$, 可以得到关于 r 的方程, 那么 r 就容易解出来了.

解答: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}r}{4}$; 在 $\triangle ABC$ 中, 用余弦定理, 得到,

$$AC^2 = 1 + r^2 - 2 \cdot 1 \cdot r \cdot \cos 120^\circ = 1 + r^2 + r, \text{ 所以 } S_{\triangle AEC} = \frac{\sqrt{3}AC^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(1+r^2+r)}{4}$$

因为 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle AEC} = 1:7$, 所以 $\frac{r}{1+r^2+r} = \frac{1}{7}$, 得, $r^2 - 6r + 1 = 0$, 由韦达定理, 它的两个根之和为 6. 选 E。

Problem 20

考点：立体几何

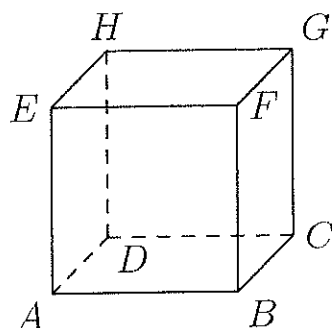
解答：苍蝇的路径总共由8条线段组成，每条线段都是从一个顶点到另一个顶点。

这样的线段长度可能是1（棱长）， $\sqrt{2}$ （面对角线），或 $\sqrt{3}$ （体对角线）。

正方体的体对角线最多是4条，因此路径最多包含4条体对角线，其他4条都为

面对角线便是路径所能达到的最长长度。最长路径长为 $4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$, or D.

一种可能的路径如下所示： $A \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow A$.



Problem 21

考点：代数（韦达定理）+数论（不定方程）

解答：这里给出了多项式有3个正整数根 r_1, r_2, r_3 ，要求系数a，所以是根与系数的关系，需要用到韦达定理。

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = a \\ r_1 r_2 r_3 = 2010 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 67 \end{cases}$$

要求 $a = r_1 + r_2 + r_3$ 最小，所以其中一个根必为67，那么其他两个根可能是2,15；

5,6；3,10. 由此，a最小为 $67+5+6=78$.

Answer : A

Problem 22

考点: 排列组合

解答: 要形成这样的三角形, 则需要选择圆上 6 个点, 有 $C_8^6 = C_8^2 = 28$ 种方法。

而对于选择的这 6 个点, 只有 1 种方法可以形成这样的三角形。因此总共有

$28 \times 1 = 28$ 种方法, 选 A。

Problem 23

考点: 概率(条件概率)

解答: 从第 k 个盒子抽到一个白色玻璃球的概率为 $\frac{k}{k+1}$, 抽到一个红色玻璃球的概率为 $\frac{1}{k+1}$ 。根据题目意思, 抽到的前 $n-1$ 个玻璃球都是白色, 第 n 个是红

色, 因此概率为 $P(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{2010}$ 。所以

$n(n+1) > 2010$ 。当 n 增大时, $n(n+1)$ 的值也增大。观察选项, 将最小的 45

代入, $45 \times 46 = 2070 > 2010$ 满足不等式, 因此答案为 (A) 45。

Problem 24

考点: 数论(中国余数定理, 模运算)

解答: 先求 $90!$ 结尾 0 的个数, 它等于 $90!$ 质因数分解中因子 5 的个数, 因为 2

的个数比 5 的个数多很多。因此 $90!$ 的结尾有 $\left\lfloor \frac{90}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{5^3} \right\rfloor + \cdots = 18 + 3 = 21$

个 0。因此题目要求 $x = \frac{90!}{10^{21}} \pmod{100}$ 。根据中国余数定理, 即通过求

$$x = \frac{90!}{10^{21}} \pmod{4} \text{ 和 } x = \frac{90!}{10^{21}} \pmod{25}, \text{ 构造同余方程组 } \begin{cases} x = \frac{90!}{10^{21}} \pmod{4} \\ x = \frac{90!}{10^{21}} \pmod{25} \end{cases}, \text{ 方程组}$$

的在 $[0, 100)$ 内的解即为 x 模 100 的余数。

因为 90! 中 2 的个数有

$$\left\lfloor \frac{90}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{2^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{2^6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{2^7} \right\rfloor + \dots = 45 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 + 0 = 86$$

个, 因此 $\frac{90!}{10^{21}}$ 为 4 的倍数, 则 $x = \frac{90!}{10^{21}} \equiv 0 \pmod{4}$ 。

注意到,

$$\begin{aligned} & (10k+1)(10k+2)(10k+3)(10k+4)(10k+6)(10k+7)(10k+8)(10k+9) \\ &= [(10k+1)(10k+9)] \times [(10k+2)(10k+8)] \times [(10k+3)(10k+7)] \times [(10k+4)(10k+6)] \\ &\equiv 9 \times 16 \times 21 \times 24 \equiv 9(-9)(-4)(-1) \equiv 1 \pmod{25} \end{aligned}$$

因此,

$$x = \frac{90!}{10^{21}} \equiv \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \dots \cdot (81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89) (5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \dots \cdot 80 \cdot 85 \cdot 90)}{10^{21}} \pmod{25}$$

$$\equiv \frac{(1) \cdot \dots \cdot (1) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18)}{2^{21}} \pmod{25}$$

$$\text{设 } \frac{(1) \cdot \dots \cdot (1) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18)}{2^{21}} \equiv y \pmod{25}$$

则 $2^{21}y \equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18) \pmod{25}$, 因为

$$2^{21} = 2 \cdot (2^{10})^2 = 2 \cdot (1024)^2 \equiv 2(-1)^2 \equiv 2 \pmod{25}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} 2y &\equiv [1 \cdot (2 \cdot 12) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (4 \cdot 6) \cdot 1 \cdot (7 \cdot 2) \cdot (9 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (-12) \cdot (-11) \cdot (-9) \cdot (-8) \cdot (-7)] \\ &\equiv [(-1)(-1)(-1)(-11)(2)(11)(132)(72)(-7)] \\ &\equiv 11 \cdot 22 \cdot 7 \cdot (-3)(-7) \equiv (-8)(7)(-4) \equiv -1 \pmod{25} \end{aligned}$$

即 $2y \equiv -1 \pmod{25}$, 则 $24y \equiv -12 \pmod{25}$, $25y - y \equiv -12 \pmod{25}$, 所以

$-y \equiv -12 \pmod{25}$, 则 $y \equiv 12 \pmod{25}$, 因此 $x = \frac{90!}{10^{21}} \equiv 12 \pmod{25}$, 于是得到以下

同余方程组:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{4} \\ x \equiv 12 \pmod{25} \end{cases}, \text{ 观察选项, 只有选项 A 是此方程组的解, 因此选 A.}$$

注: 此同余方程组的通解为 $x = 12 + 100k, k \in \mathbb{Z}$.

Problem 25

考点: 逆推思维

解答: 这里我们采取从最后一个数 0 向前逆推的方法, 求出 N。假设这组数中的某个数为 x , 则它前面的数为 $x + k^2$; 因为 k^2 是小于等于 $x + k^2$ 的最大平方数, 因此需满足 $x + k^2 < (k+1)^2$, 解得, $k > \frac{x-1}{2}$ 。这意味着, 若已知这 8 个数中某个数 x , 则它前面的数为 $x + k^2$, 其中 k 取满足这个不等式 $k > \frac{x-1}{2}$ 的最小正整数即可。

因此, 最后一个数为 $x_1 = 0$, 倒数第二个数为 $x_2 = 1$, $k_2 > \frac{x_2-1}{2} = 0$, 则 $k_2 = 1$, 因此倒数第 3 个数为 $x_3 = x_2 + k_2^2 = 1 + 1^2 = 2$; 再继续同样操作, $k_3 > \frac{x_3-1}{2} = \frac{1}{2}$, $k_3 = 1$, 倒数第 4 个数为 $x_4 = x_3 + k_3^2 = 2 + 1^2 = 3$; $k_4 > \frac{x_4-1}{2} = 1$, $k_4 = 2$, 倒数第 5 个数为 $x_5 = x_4 + k_4^2 = 3 + 2^2 = 7$; $k_5 > \frac{x_5-1}{2} = 3$, $k_5 = 4$, 倒数第 6 个数为 $x_6 = x_5 + k_5^2 = 7 + 4^2 = 23$; $k_6 > \frac{x_6-1}{2} = 11$, $k_6 = 12$, 倒数第 7 个数为 $x_7 = x_6 + k_6^2 = 23 + 12^2 = 167$; $k_7 > \frac{x_7-1}{2} = 83$, $k_7 = 84$, 倒数第 8 个数, 即 N 为 $N = x_8 = x_7 + k_7^2 = 167 + 84^2 = 7223$, 个位是 3. 选择 B.