

2010 AMC10B 解答

Problem 1

考点: 算术

解答:

$$100(100 - 3) - (100 \cdot 100 - 3) = 10000 - 300 - 10000 + 3 = -300 + 3 = \boxed{(C) - 297}$$

Problem 2

考点: 算术

解答: 总工作时间 9 小时化成分钟为 $9 \times 60 = 540$. 花在会议上的总时间 (分钟)

$$\text{为 } 45 + 45 \times 2 = 135. \text{ 因此答案为 } n \frac{135}{540} = \boxed{25\%} \text{ 或者 } \boxed{(C)}$$

Problem 3

考点: 鸽笼原理

解答: 最差的情况是抽出 4 只袜子, 4 只颜色都不同。但是在抽第 5 只时, 颜色一定和前 4 只中某一只颜色相同。因此至少需要抽出 5 只才能保证有一双同色。
选 C.

Problem 4

考点: 算术

解答:

a 和 b 定义为 $\frac{a+b}{2}$. 因此 x 和 x^2 的平均值为 $\frac{x(x+1)}{2}$. 则

$\heartsuit(1) + \heartsuit(2) + \heartsuit(3)$ 等于

$$\frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} = \frac{2}{2} + \frac{6}{2} + \frac{12}{2} = 1+3+6 = \boxed{(C)10}$$

Problem 5

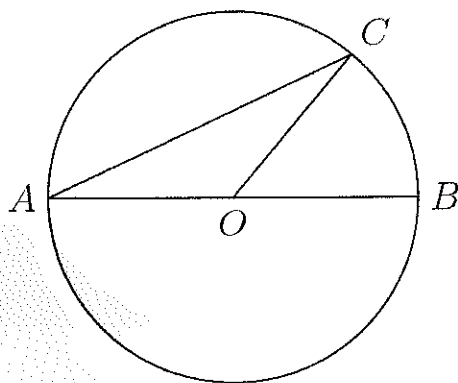
考点: 数论 (求余)

解答: 这个月的前 28 天恰好是 4 周, 一共出现了 4 次周一和 4 次周三, 因此我们只需要保证这个月的第 29, 30 和 31 天内出现周一和周三的次数相同即可。第 1 天是星期 x , 则第 29 天也是星期 x . 因此要保证最后三天周一和周三次数一样, 则第 29 天只能取星期 1, 星期 4, 星期 5, 即第 1 天也只能是星期 1, 星期 4, 星期 5, 选 B.

Problem 6

考点: 平面几何 (圆)

解答:



因为圆周角 $\angle CAB$ 和圆心角 $\angle COB$ 对同一段圆弧 CB ，因此

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle COB = 25^\circ, \text{ 选 B.}$$

Problem 7

考点：平面几何（等腰三角形）

解答：三角形为等腰三角形，因此高为 $h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} = \sqrt{64} = 8$

那么三角形面积为 $\frac{bh}{2} = \frac{12 * 8}{2} = \frac{96}{2} = 48$ 。由于矩形面积也为 48，且矩形的

宽为 4，则矩形的长为 $l = \frac{48}{4} = 12$ 。因此矩形的周长

为 $2l + 2w = 2 * 12 + 2 * 4 = 32$ ，那么答案为 **(D) 32**

Problem 8

考点：数论（最大公约数、因子个数定理）

解答：由题意， x 为 48 的一个因子，也为 64 的一个因子，那么 x 就是 48 和 64 的公因数，而公因数为最大公约数的因数，因此我们只需求出 48 和 64 的最大公约数是 16，再求出 16 的正因子个数即可。因为 $16 = 2^4$ ，根据因子个数定理，共有 5 个正因子，选 E。

Problem 9

考点：代数（解一元一次方程）

解答：将值代入得， $1 - 2 - 3 - 4 + e = 1 - (2 - (3 - (4 + e)))$ ，化简得，

$-8 + e = -2 - e$ ，得， $2e = 6$ ，解得， $e = 3$ (D)

Problem 10

考点:代数(列方程解应用题)

解答: 令 x 小时表示不下雨的时间, y 小时表示下雨的时间。则有:

$30x + 20y = 16$ 且 $x + y = 2/3$ 。解得, $x = \frac{4}{15}$ 且 $y = \frac{2}{5}$ 。化为分钟

$\frac{2}{5} * 60 = 24 \Rightarrow C$
为 $\frac{2}{5}$

Problem 11

考点: 代数(解不等式)

解答: 令标价为 $(100 + p)$, 这里 $p > 0$

优惠券 A 节省: $0.15(100 + p) = (0.15p + 15)$ 美元

优惠券 B 节省: 30 美元

优惠券 C 节省: $0.25p$ 美元

因为要求 A 节省的钱至少和 B 或 C 节省的钱一样多, 则:

$$A \geq B \Rightarrow 0.15p + 15 \geq 30 \Rightarrow p \geq 100$$

$$A \geq C \Rightarrow 0.15p + 15 \geq 0.25p \Rightarrow p \leq 150$$

因此 p 的最大值为 150, 那么 $y = 100 + 150 = 250$ 。 p 的最小值为 100 因此

$$x = 100 + 100 = 200. \text{ 则 } y - x = 250 - 200 = \boxed{(A) 50}$$

Problem 12

考点: 极端思维

解答: x 最大的情形是: 学年初, 原来 50% 回答“不”的学生在学年结束时全部回答“是”, 原来 50% 回答“是”的学生有 30% 回答“不”, 这样 $x\% = 80\%$ 。

x 最小的情形是, 学年初, 原来 50% 回答“是”的学生不变, 而原来 50% 回答“不”的学生有 20% 在学年结束时改口回答“是”, 此时 $x\%=20\%$.

那么 x 的最大值和最小值之差为 $80-20=60$. 选 D.

Problem 13

考点: 代数 (解方程)

解答: $2x - |60 - 2x| = x$ 或者 $2x - |60 - 2x| = -x$. 分别化简得, $|60 - 2x| = x$ 或 $|60 - 2x| = 3x$. 因此 $60 - 2x = \pm x$ 或 $60 - 2x = \pm 3x$, 解得, $x = 20, 60, 12, -60$. 为了舍去增根, 分别代入原方程检验. 经检验, 只有 $x = 20, 60, 12$ 为原方程的解. 它们的和为 92, 选 C.

Problem 14

考点: 数据分析 (平均值)

解答: $\frac{1+2+3+\dots+99+x}{100} = 100x$, 即 $4950 + x = 10000x$, 解得, $x = \frac{50}{101}$, 选 B.

Problem 15

考点: 代数 (简单不等式)

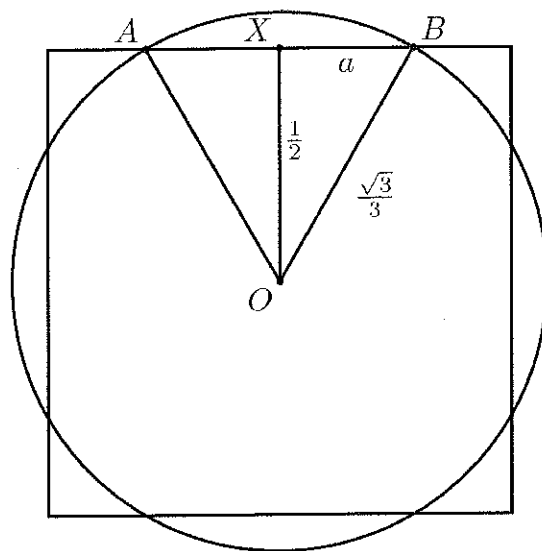
解答: 假设 Jesse 答对 x 题, 答错 y 题, 则 $4x - y = 99$, 且 $x + y \leq 50$. 由第一个方程得, $y = 4x - 99$ 代入第二个不等式, $5x - 99 \leq 50, x \leq 29.8$, 因此 x 最大取 29, 选 C.

Problem 16

考点: 平面几何 (等边三角形面积及扇形面积)

解答:

圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, 小于正方形对角线的一半: $\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, 而大于正方形边长的一半 $\frac{1}{2}$ 。所以圆会经过正方形外部, 但正方形不会完全被圆覆盖, 因此整个几何图形如下图所示:



我们要求的是: 4 · (扇形 AOB 的面积 - $\triangle AOB$ 的面积).

因为 $OX \perp AB$, 所以 OX 为正方形边长的一半, 即 $OX = \frac{1}{2}$ 。因为

$\cos \angle XOB = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\angle XOB = 30^\circ$, 则 $\angle AOB = 60^\circ$, 那么 $\triangle AOB$ 为等边

三角形, 因此 $S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3}}{4} AO^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ 。而扇形 AOB 面积为 $\frac{1}{6} \pi \cdot AO^2 = \frac{\pi}{18}$ 。

因此最后的答案为 $4 \cdot \left(\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) = \boxed{(B) \frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}}$

Problem 17

考点: 数据分析 (中位数) + 代数 (不等式)

解答: 参赛总人数为 3 的倍数, 设为 $3k$ 人。因为中位数是 Andrea 这 1 人, 因此总人数 $3k$ 是个奇数。排名在 Andrea 之前的有 $\frac{3k-1}{2}$ 人, 因此 Andrea 排名为第 $\frac{3k-1}{2}+1$ 名, 则 $\frac{3k-1}{2}+1 < 37$, 且总人数 $3k \geq 64$, 解这 2 个不等式得, $21\frac{1}{3} \leq k < 24\frac{1}{3}$, 因此 $k = 22, 23, 24$ 。而 $3k$ 需是个奇数, 则 $k = 23$, 则一共有 23 所学校参赛, 选 B。

Problem 18

考点: 概率+数论

关键思路解析: $3 \mid a(bc+b+1)$, 则我们需要分 2 种情况, $3 \mid a$ 和 3 不能整除 a 。前一种情况的种数比较好算, 对于后一种, $3 \mid bc+b+1$, 化成模运算, 即, $b(c+1) \equiv 2 \pmod{3}$, 后面分别对 b 和 c 讨论就容易多了。

解答:

1. 先看第一种情况: $3 \mid a$. 则 a 一共有 $\left\lfloor \frac{2010}{3} \right\rfloor = 670$ 个。这种情况下, b 和 c 可任选, 则所有可能性是 $670 \cdot 2010 \cdot 2010$ 。

2. 再看第二种情况, 3 不能整除 a , 则 a 一共有 1340 种。而 $b(c+1) \equiv 2 \pmod{3}$, 则

$$\begin{cases} b \equiv 2 \pmod{3} \\ c \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ 或者 } \begin{cases} b \equiv 1 \pmod{3} \\ c \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}. \text{ 前者 } b \text{ 有 } 670 \text{ 种, } c \text{ 有 } 670 \text{ 种; 后者 } b \text{ 有 } 670$$

种, c 有 670 种。那么一共有 $1340(670 \cdot 670 + 670 \cdot 670)$ 。

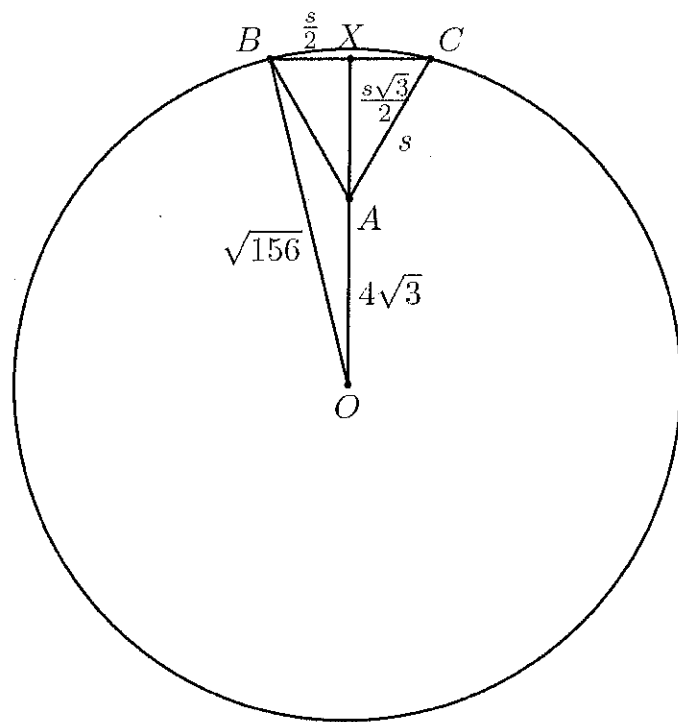
$$P = \frac{1340(670 \cdot 670 + 670 \cdot 670) + 670 \cdot 2010 \cdot 2010}{2010 \cdot 2010 \cdot 2010} = \frac{13}{27}$$

Problem 19

考点:平面几何(等边三角形的性质+勾股定理)

解答:圆的面积公式为 πr^2 , 因此圆的半径为 $\sqrt{156}$.

因为 $OA = 4\sqrt{3} < \sqrt{156}$, A 则一定在圆 O 内.



令 s 为 $\triangle ABC$ 的边长, 且令 X 在边 BC 上, 满足 $OX \perp BC$. 因为 $\triangle ABC$ 为

等边三角形, 则 $BX = \frac{s}{2}$, $AX = \frac{s\sqrt{3}}{2}$. 又 $AO = 4\sqrt{3}$. 由勾股定理得到下面

方程, 并解出 s :

$$(\sqrt{156})^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3}\right)^2$$

$$156 = \frac{1}{4}s^2 + \frac{3}{4}s^2 + 12s + 48$$

$$0 = s^2 + 12s - 108$$

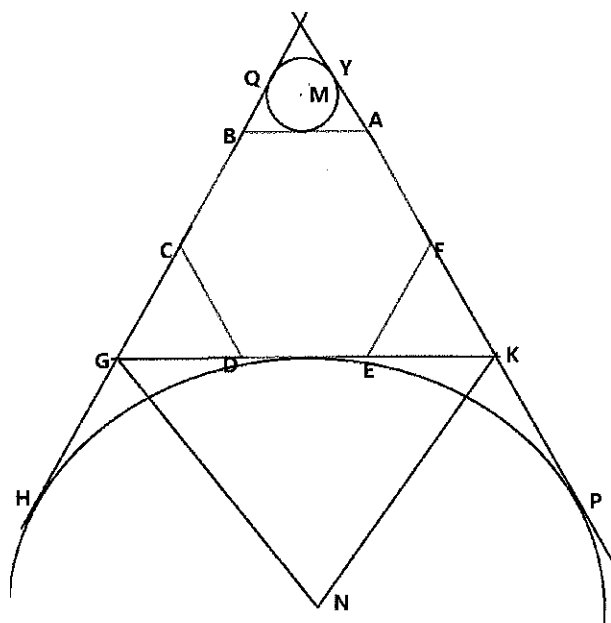
$$0 = (s - 6)(s + 18)$$

$$s = \boxed{(B) 6}$$

Problem 20

考点：平面几何

解答：画出如下图形.要求面积之比,只需求两个圆的半径比即可.圆心 N 是外角 $\angle HGD$ 和 $\angle PKE$ 的平分线的交点.因此 $\angle NGD = \angle NKE = 60^\circ$, 所以 $\triangle NGK$ 是等边三角形,高即为圆 N 的半径.假设正六边形 $ABCDEF$ 边长为 2, 所以 $GK=6$, 因此等边三角形 GNK 的高为 $3\sqrt{3}$, 即 $R_N = 3\sqrt{3}$. 同理求出 $R_M = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以面积之比为半径比的平方, 为 81:1. 选 D。



Problem 21

考点：数论（回环数和整除）

解答：因为是个 4 位回环数, 所以设为 $ABBA$, 因为要能被 7 整除, 根据能被 7 整除的整数的特征, 因此要求 $100A + 10B + B - 2A = 98A + 11B$ 必须是 7 的倍数。而 98 是 7 的倍数, 因此 $7 \mid 11B$, 所以 $B = 0, 7$ 。而 $A = 1 \sim 9$, 所以总共有 $2 \times 9 = 18$

个这样的回环数。而总的 4 位回环数个数为 $10 \times 9 = 90$ 个, 那么概率为 $P = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$,

选 E.

Problem 22

考点:排列组合 (运用 PIE) (关于 PIE 这个方法, 在店内 AMC10 或 AMC12 的教材中有详细讲解)

解答: 先不管题中的特殊要求, 将 7 块不同的糖果分配到 3 个包中, 共 $3^7 = 2187$ 种方法。但这其中有红包和/或蓝包为空的情况 (这是反面情况), 需要扣除, 下面运用 PIE 计算。

集合 A: 红包为空的情况数。也就是将 7 个糖果分配给其他 2 个包, 共有 $2^7 = 128$ 种;

集合 B: 蓝包为空的情况数。与集合 A 相同, 也是 128 种。

$A \cap B$: 即红包和蓝包均为空的情况。也就是把 7 块糖果都分配给白包, 只有 1 种方法。

根据 PIE, 红包或蓝包为空的情况数为: $A \cup B = A + B - A \cap B = 128 + 128 - 1 = 255$

种情况, 这是反面的情况。那么符合题意的情况为: $2187 - 255 = 1932$, 选 C.

Problem 23

考点:排列组合 (分类讨论)

解答: 这道题的分类讨论的标准不唯一。以下介绍的是其中一种分类标准。

为清楚说明, 将阵列编号如下:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

首先能确定的是 A 和 I 必定分别是 1 和 9，如下图所示。接着 2 必定位于 B 或 D 中，8 必定位于 F 或 H 中。因此下面根据 2 和 8 位于对角线同侧还是异侧进行分类讨论。

1	B	C
D	E	F
G	H	9

①若 2 和 8 位于对角线同侧，即分别位于 B 和 F，或者 D 和 H，2 种情况。如位于 B 和 F，如下图：

1	2	C
D	E	8
G	H	9

注意到 H 必须大于 D, E, G, 即至少需要大于 3 个数, 因此 H 是 7 或 6. 下面分 2 类讨论。

(i) 若 $H=7$, 注意到 D 比 E 和 G 都小, 即剩下的数中, D 需要小于 2 个数, 所以 D 可能是 3 或 4. 若 $D=3$, 则 E 和 G 的取值是从 4, 5, 6 中选 2 个, 并需要考虑顺序, 共 $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$ 种方法, 剩下最后 1 个数填到 C. 若 $D=4$, 则 $G=5, E=6$ 或 $G=6, E=5$, 共 2 种情况. 最后 3 填到 C. 因此, $H=7$ 时, **总的方法数是: $6+2=8$ 种。**

(ii) 若 $H=6$, 注意到 D, E, G 只能从 3, 4, 5 中选, 且 D 比 E 和 G 都小, 则 D 只能是 3, 此时 G 和 E 是从 4 和 5 种选, 2 种方法, 7 只能给 C. 因此, $H=6$ 时, **总的方法数是 2 种。**

②若 2 和 8 位于对角线异侧, 即分别位于 B 和 H, 或者 D 和 F, **2 种情况。**如位于 D 和 F, 如下图:

D	B	C
2	E	8
G	H	9

注意到 H 必须大于 B, E, G, 即至少需要大于 3 个数, 因此 H 是 7 或 6. 下面分 2 类讨论。

(i) 若 $H=7$, 注意到 B 比 E 和 C 都小, 即剩下的数中, B 需要小于 2 个数, 所以 B 可能是 3 或 4. 若 $B=3$, 则 E 和 C 的取值是从 4, 5, 6 中选 2 个, 并需要考虑顺序, 共 $A_3^2=3 \times 2=6$ 种方法, 剩下最后 1 个数填到 G . 若 $B=4$, 则 $C=5$, $E=6$ 或 $C=6$, $E=5$, 共 2 种情况. 最后 3 填到 G . 因此, $H=7$ 时, 总的方法数是: $6+2=8$ 种。

(ii) 若 $H=6$ 时, 7 只能填到 C . B 和 E 是从 3, 4, 5 中选 2 个, 且小的给 B , 大的给 E , 有 $C_3^2=3$ 种方法. 剩下 1 个给 G . 因此 $H=6$ 时, 总的方法数是 3 种。

综上, 这样的阵列总数为: $2 \times (2+8) + 2 \times (8+3) = 42$ 种, 选 D。

Problem 24

考点: 数列+不定方程

解答: 设 2 支队伍在第 1 节均得 x 分, 且 Raiders 在 4 节比赛分别得分:

x, xr, xr^2, xr^3 , 总分为 $x(1+r)(1+r^2)$, Wildcats 在 4 节比赛分别得分

$x, x+d, x+2d, x+3d$, 总得分为 $4x+6d$. 因为分数为正整数, 且为递增数列,

所以这里 x, d, r 都是正整数, 且 $r \geq 2$. 由题意列出如下关系

$$\begin{cases} x(1+r)(1+r^2) - 4x - 6d = 1 \\ x(1+r)(1+r^2) \leq 100 \\ 4x + 6d \leq 100 \end{cases}$$

由第 2 个不等式, 若令 $r=5$, 则 $x(1+r)(1+r^2)=156x \geq 156$ 矛盾, 因此 r 只能是 2, 3 或 4.

①若 $r=4$, 由 $x(1+r)(1+r^2)=85x \leq 100$ 知, $x=1$. 此时代入第 1 个方程, $85-4-6d=1$, 求出 d 不是一个整数. 因此 $r=4$ 不成立。

②若 $r=3$ 。由第1个方程知, $x(1+r)(1+r^2)=4x+6d+1$ 是个奇数,但是将 $r=3$ 代入左式, $x(1+r)(1+r^2)=x \cdot 4 \cdot 10$ 却是个偶数,矛盾。因此 $r=3$ 也不成立。

③那么只可能 $r=2$ 。代入第1个方程, $11x=6d+1$ 。将 $r=2$ 代入第2个不等式, $15x \leq 100, x \leq \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$, 因此 x 只能为1,2,3,4,5,6。分别代入 $11x=6d+1$, 发现只有当 $x=5$ 时, $d=9$ 是个整数。此时, Raiders的4节比赛分数是5,10,20,40; 而Wildcats的4节比赛分数是5,14,23,32; 所以前2节两个队的总分为 $5+10+5+14=34$ 分, 选E。

Problem 25

考点: 代数 (将多项式设成合适的形式)

解答: 因为 $P(1) = P(3) = P(5) = P(7) = a$, 所以设

$P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)Q(x) + a$ 。由于

$P(2) = P(4) = P(6) = P(8) = -a$, 将 $x=2,4,6,8$ 分别代入, 得到,

$2a = 15Q(2), 2a = -9Q(4), 2a = 15Q(6)$, 和 $2a = -105Q(8)$ 。可以看到, a 需要同时是

15, 9, 和 105 的倍数, 因此 a 的最小值为它们的最小公倍数, 即

$a = \text{lcm}(15, 9, 105) = 315$, 选B。