

2011 AMC 10 A 解答

Problem 1

考点: 算术

解答: 总共需要支付: $20 + 0.05 \cdot 100 + 0.1 \cdot 30 = 28$, 选 D.

Problem 2

考点: 算术

解答: 因为 $\frac{500}{35} = 14\frac{2}{7}$, 所以至少需要买 15 瓶, 选 E.

Problem 3

考点: 算术

解答: 1, 1, 和 0 求平均值得 $\frac{2}{3}$. 0, 和 1 求平均值是 $\frac{1}{2}$. 而 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$, 和 0 的平均值

为 $\boxed{(D) \frac{7}{18}}$

Problem 4

考点: 等差数列求和公式

解答: $X = \frac{(10+100) \cdot 46}{2} = 2530$, $Y = \frac{(12+102) \cdot 46}{2} = 2622$, 所以

$Y - X = 2622 - 2530 = 92$, 选 A.

Problem 5

考点: 算术

解答:假设五年级学生共 x 人, 则四年级学生 $2x$ 人, 三年级学生 $4x$ 人。他们总共的跑步时长为 $12 \cdot 4x + 15 \cdot 2x + 10 \cdot x = 88x$ 分钟。而总人数为 $7x$ 人, 因此平均每个学生跑步 $\frac{88x}{7x} = \frac{88}{7}$ 分钟。选 C。

Problem 6

考点:集合

解答:因为 $A \cup B$ 的元素个数需要不少于 A 的元素个数, 且也不少于 B 的元素个数。因此 $A \cup B$ 的元素个数大于等于 20。当 B 是 A 的子集时, $A \cup B = A$ 。选 C。

Problem 7

考点:代数(解方程)

解答: B 无解, 因为方程左边 $|-3x| + 5$ 是个不小于 5 的数, 不可能等于右边的 0, 因此无解。选 B。

Problem 8

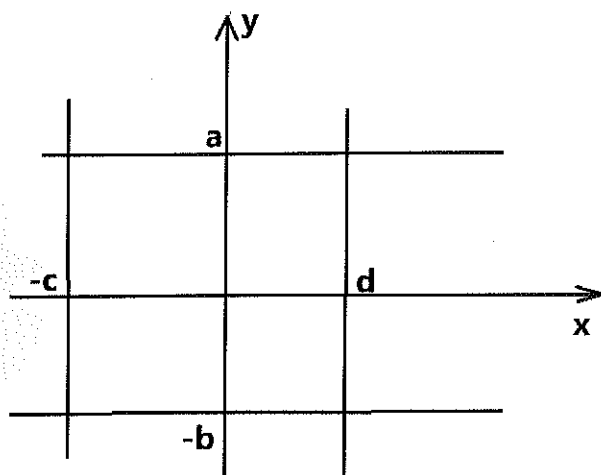
考点:算术(百分比)

解答:鹅、苍鹭和鸭子的比为 $6:2:7$, 因此鹅占的百分数为 $\frac{6}{15} = 40\%$, 选 C。

Problem 9

考点:解析几何

解答:



由图看出，矩形的面积为 $(d+c)(a+b) = da + db + ca + cb$ ，选 A.

Problem 10

考点：数论（质因数分解）

解答：假设每支铅笔是 x 美分，每个学生买了 y 支铅笔，一共 z 个学生买了铅笔。

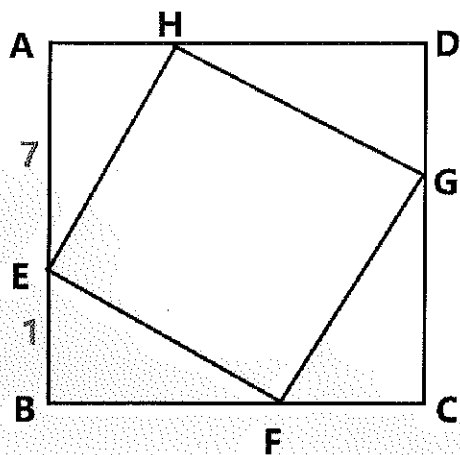
则 $xyz = 1771 = 11 \cdot 7 \cdot 23$ ，这里 x, y, z 均是正整数，且 $z > 15$, $x > y$. 那么，

$z = 23, x = 11, y = 7$, 因此一支铅笔 11 美分，选 B.

Problem 11

考点：平面几何（全等三角形）

解答：



设 $BE=1$, 则 $AE=7$. 因为 $\triangle AEH \cong \triangle BFE$, 所以 $BF=AE=7$. 在 $\triangle BEF$ 中, 由勾股定理, $EF=5\sqrt{2}$, 所以 $EFGH$ 的面积与 $ABCD$ 的面积比值为

$$\left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{25}{32}, \text{ 选 B.}$$

Problem 12

考点: 代数 (列方程解应用题)

解答: 设假设投进二点球 x 个, 则投进的 3 分球为 $\frac{2x}{3}$ 个, 投进的罚球个数为 $x+1$ 个, 因此总分为 $2x+3 \cdot \frac{2x}{3}+x+1=61$, 解得, $x=12$, 因此投进罚球个数为 13 个. 选 A.

Problem 13

考点: 排列组合 (分类讨论)

解答: 最高位只可能是 2 或 5. 若最高位为 2, 因为是偶数, 则最低位只能是 8, 那么十位只能是从剩余 4 个数字中选一个, 有 4 种可能性; 若最高位为 5, 则最低位为 2 或 8, 有 2 种可能性, 十位数字只能从剩余 4 个数字中选一个, 有 4 种可能性, 因此共 $2 \times 4 = 8$ 个数.

综上 2 种情况, 一共有 $4+8=12$ 种可能性. 选 A.

Problem 14

考点: 概率

解答: 我们先考察满足要求的这 2 个数具有什么样的特征. 假设这 2 个数为 x 和 y . 则圆的半径为 $\frac{x+y}{2}$, 因此 $\pi \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 < \pi(x+y)$, 化简得, $x+y < 4$. 所以只有

以下 3 种可能: $x=1, y=1$ 或 $2; x=2, y=1$; 而总的可能性为 $6 \times 6 = 36$ 种, 由此概率为 $P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, 选 B.

Problem 15

考点: 代数(列方程解应用题)

解答: 假设旅程的剩余路程为 x 英里, 则这段路程用了 $0.02x$ 加仑的汽油。那么整个旅程平均每加仑行驶的英里数为 $\frac{40+x}{0.02x} = 55$, 解得, $x = 400$, 因此总旅程为 440 英里, 选 C.

Problem 16

考点: 代数(因式分解)

解答: 因为

$$\left(\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}\right)^2 = 9-6\sqrt{2} + 9+6\sqrt{2} - 2\sqrt{(9-6\sqrt{2})(9+6\sqrt{2})} = 18 + 2 \cdot 3 = 24,$$

所以 $\left(\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{6}$, 选 B.

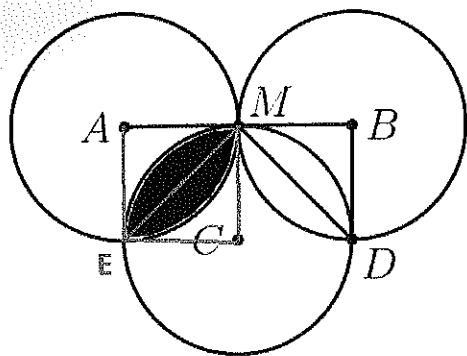
Problem 17

考点: 数列

解答: 因为 $E+F+G = F+G+H$, 因此 $H=E$ 。同理, $E=B$, 所以 $H=B$ 。那么 $A+H = A+B = 30-C = 30-5 = 25$, 选 C.

Problem 18

考点: 平面几何



关键思路解析：要求的面积为圆 C 的面积减去阴影部分面积的 2 倍. 而阴影部分面积的一半是比较容易求得的, 是扇形 AME 的面积减去 $\triangle AME$ 的面积, 下面说明 $\angle A$ 是直角即可.

解答：因为 $AE=AM=CM=CE=1$, 且 $CM \perp AB$, 所以四边形 AMCE 是正方形. 那么 $\angle A=90^\circ$. 所以扇形 AME 的面积为 $\frac{\pi}{4}$, $\triangle AME$ 的面积为: $\frac{1}{2}$, 因此月牙形的面积(即阴影面积的一半)为 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. 所以题目要求的面积为圆 C 的面积减去月牙形面积的 4 倍: $\pi - 4 \cdot (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) = 2$

Answer : C

Problem 19

考点:数论(不定方程)

解答：设 1991 年人口数为 x^2 人, 则 $x^2 + 150 = y^2 + 9$, 到了 2011 年, 则 $y^2 + 159 = z^2$.

化简第 1 个方程, $y^2 - x^2 = 141$, 即 $(y+x)(y-x) = 141 \cdot 1 = 47 \cdot 3$, 所以

$$\begin{cases} y+x=141 \\ y-x=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} y+x=47 \\ y-x=3 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} x=70 \\ y=71 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=22 \\ y=25 \end{cases}. \text{ 当 } y=71 \text{ 时, } y^2+159=5200$$

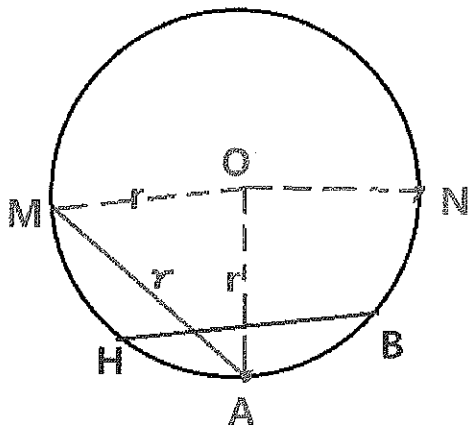
不是完全平方数; 当 $y=25$ 时, $y^2+159=784=(28)^2$, 符合. 因此 1991 年人口数为 $x^2=22^2$, 2011 年人口数 $z^2=(28)^2$, 所以这 20 年间人口数增加的百分数为

$$\frac{28^2 - 22^2}{22^2} \approx 62\%, \text{ 选 E}$$

Problem 20

考点：几何概率

解答：



假设圆心为 O ，选择的这 2 个点分别是 A 和 B 。然后如图固定 A 点在最底部，顺时针方向画出长度 r 的弦 AM 。此时为了使得从 B 顺时针引出的弦和 AM 相交，则 B 只能在弧 MAN 上，其中选取的 N 点是使得弦 $AN=r$ ，即 $\angle AON=60^\circ$ 。弧 MAN 对应圆心角为 120° 。而点 B 的所有可能位置是在整个圆周上，对应圆心角为 360° 。因此概率为 $P = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$ ，选 D。

Problem 21

考点：概率

解答：要求 2 对硬币总重一样，这里分 2 种情况：

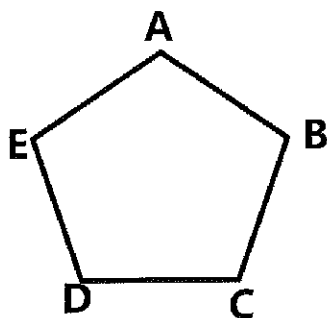
- ① 2 对都是真币。第 1 对是真币，则是从 8 枚真币里选 2 个，有 C_8^2 种方法；第 2 对也是真币，则是从剩下的 6 枚真币里选择 2 个，有 C_6^2 种方法。因此总共 $C_8^2 \cdot C_6^2$ 种方法。

② 2 对中的每 1 对都是一真一假。选择第 1 对时，从假币里选择 1 枚，有 2 种方法，从 8 枚真币里选择 1 枚，有 8 种方法；选择第 2 对时，选择假币只有 1 种方法，而选择真币则是从剩下的 7 枚真币里选 1 枚，有 7 种方法。因此总共有 $2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 7 = 112$ 种方法。

所以 4 枚硬币都是真币的概率为 $P = \frac{C_8^2 \cdot C_6^2}{C_8^2 \cdot C_6^2 + 112} = \frac{15}{19}$ ，选 D。

Problem 22

考点:排列组合(分类讨论)



关键思路解析:我们按照次序依次给 ABCDE 涂色。给 A 涂色，一共有 6 种方法。给 B 涂色，B 不受 A 的限制，也有 6 种颜色。轮到 C 了，C 的颜色需要和 A 不同，所以有 5 种颜色可选。D 因为要和 B 和 A 的颜色都要不同，但是 B 和 A 的颜色是可能相同的，这就造成 D 的颜色的种数取决于 A 和 B 的颜色相同还是不同，这里产生了分类讨论。同样的，E 的颜色种数也取决于 B 和 C 的颜色相同还是不同，所以还需要对 B 和 C 的颜色情况进行分类讨论。

解答:下面我们根据 AB 颜色情况和 BC 颜色情况进行分类讨论，一共 4 种情况。

1. AB have different colors, and BC have the same color:

The number of possible colorings for A,B,C,D,E are : 6,5,1,4,5, respectively, for a total of 600 possibilities.

2. AB have different colors, and BC have different colors:

The number of possible colorings for A,B,C,D,E are : 6,5,4,4,4,
Respectively, for a total of 1920 possibilities.

3. AB have the same color, and BC have different colors:

The number of possible colorings for A,B,C,D,E are : 6,1,5,5,4,
Respectively, for a total of 600 possibilities.

4. AB have the same color, and BC have the same color: impossible.

The total number of colorings is : $600 + 1920 + 600 = 3120$.

Answer: C

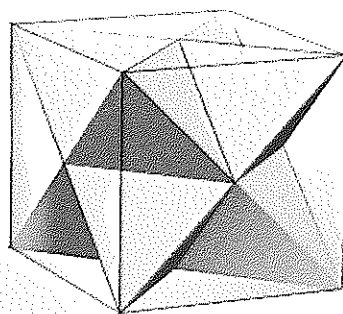
Problem 23

考点: 数列(等差数列)

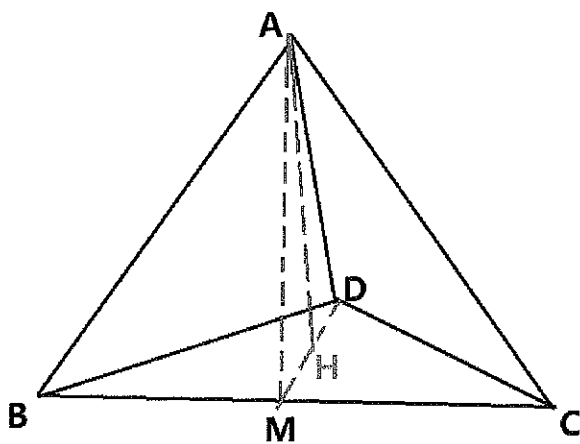
解答: 我们先列出一些数以寻找规律。Alice 没有数的数为: 2, 5, 8, ..., 即首项为 2, 公差为 3 的数列; Barbara 没有数的数为: 5, 14, 23, 即首项为 5, 公差为 9 的等差数列; Candice 没有数的数为: 14, 41, 68, ... 即首项为 14, 公差为 27 的等差数列; 至此我们可以看到, 每个人没有数的数都组成等差数列, 后面一个人的首项均为前一个人的首项与公差之和, 且每个人的公差均为 3 的幂。由此可以得到, 对于没有数的数, Debbie 的首项为 41, 公差为 81; Eliza 的首项为 122, 公差为 243; Fatima 的首项为 365, 公差为 729; 而 365 正是 Fatima 没有数, 而 George 要数的数。因此 George 数的数是 365, 选 C.

Problem 24

考点: 立体几何

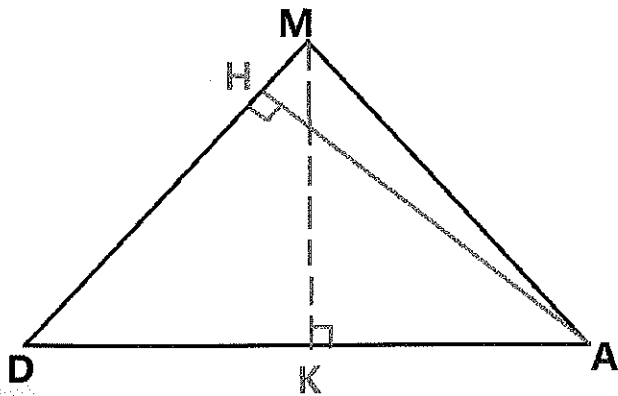


解答：要求的相交部分立体图形的体积，可以看做大的四面体体积减去 4 个小的四面体体积。大的四面体棱长为 $\sqrt{2}$ ，其体积求解如下：



如上图，A-BCD 为棱长 $\sqrt{2}$ 的正四面体。取 BC 的中点 M，连接 AM，DM。再在 $\triangle AMD$ 中，过 A 作 $AH \perp DM$ 。则 AH 为四面体的高。证明如下：因为 $CB \perp AM$ ， $CB \perp DM$ ，而 AM 与 DM 交于 M，则 $BC \perp$ 平面 AMD，所以平面 AMD $\perp$ 平面 BDC，因为 AH 垂直交线 DM，所以 $AH \perp$ 平面 BCD。

容易求得， $AM = DM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，所以在等腰 $\triangle AMD$ 中，如下图：



过 M 作 $MK \perp DA$, $MK = \sqrt{MD^2 - DK^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ 。则

$$AH = \frac{AD \cdot MK}{DM} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}。那么四面体 A-BCD 的体积$$

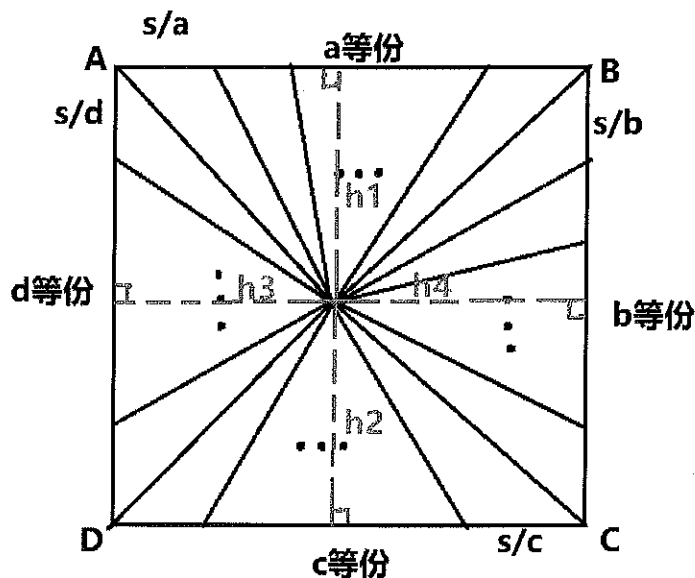
为: $V_{A-BCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$ 。下面求小的四面体体积。

因为小的四面体和大的四面体是相似形, 且其棱长为大的四面体棱长的一半, 所以体积为大的四面体体积的 $1/8$, 因此, 2 个大四面体相交部分的体积为:

$$V = V_{A-BCD} - 4 \cdot \frac{1}{8} V_{A-BCD} = \frac{1}{2} V_{A-BCD} = \frac{1}{6}, \text{ 选 D.}$$

Problem 25

考点: 排列组合



解答: 设从 X 点引出 100 条射线将正方形的边 AB, BC, CD, DA 分别 a 等份, b 等份, c 等份和 d 等份, 且 X 点到这四条边的高分别为 h_1, h_2, h_3, h_4 , 如上图所示。设正方形边长为 s, 则根据这些小三角形面积相等, 得到:

$$\frac{s}{a} \cdot h_1 = \frac{s}{b} \cdot h_4 = \frac{s}{c} \cdot h_2 = \frac{s}{d} \cdot h_3, \text{ 即 } \frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{c}, \frac{h_3}{h_4} = \frac{d}{b}, \frac{h_1}{h_3} = \frac{a}{d}. \text{ 由前两式,}$$

$$h_1 = \frac{a}{a+c} s, h_3 = \frac{d}{d+b} s, \text{ 由此可以确定 X 点的位置。代入第三式,}$$

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{d+b}{d} = \frac{a}{d}, \text{ 化简之, } a+c=d+b, \text{ 又因为 } a+c+d+b=100, \text{ 所以}$$

$a+c=d+b=50$, 这是 a, b, c, d 所需要满足的条件。因为 a 可以从 1 取到 49, b 也可以从 1 取到 49, 相应地, c 和 d 唯一确定。因此, 满足 100-射线分割的点共有 49^2 个, 这其中有些点同时也是 60 射线分割点, 需要扣除。

假设 60 射线分割的点 X' 将边 AB, BC, CD, DA 分别 a' 等份, b' 等份, c' 等份和 d' 等份, 且 X' 点到这四条边的高分别为 h_1', h_2', h_3', h_4' 。同理可得,

$$a'+c'=d'+b'=30. \text{ 若 100 射线分割点同时也是 60 射线分割点, 则需满足: } \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1'}{h_2'}$$

$$\text{且 } \frac{h_3}{h_4} = \frac{h_3'}{h_4'}, \text{ 即 } \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \text{ 且 } \frac{d}{b} = \frac{d'}{b'}, \text{ 即 } \frac{a}{50-a} = \frac{a'}{30-a'} \text{ 且 } \frac{d}{50-d} = \frac{d'}{30-d'}, \text{ 化简得,}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{5}{3} \text{ 且 } \frac{d}{d'} = \frac{5}{3}, \text{ 而因为 } a \text{ 只能从 1 到 49 取值, 所以满足此式的 } a \text{ 取值为}$$

5, 10, 15, 20, 25, ..., 45, 对应 a' 的取值为 3, 6, 9, 12, 15, ..., 27。共 9 对取值; 同理,

满足此式的 d 取值为 5, 10, 15, 20, 25, ..., 45, 对应 d' 的取值为 3, 6, 9, 12, 15, ..., 27。

共 9 对取值。因此, 是 100 射线分割同时也是 60 射线分割的点共 9^2 个。那么是

100 射线分割但不是 60 射线分割的点共有 $49^2 - 9^2 = 2320$ 个, 选 C。