

2011 AMC 10 B 解答

第1题

考点: 算术

解答:

$$\frac{2+4+6}{1+3+5} - \frac{1+3+5}{2+4+6} = \frac{12}{9} - \frac{9}{12} = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{7}{12}} \text{ (C)}$$

第2题

考点: 算术

解答: 目前她的平均分是 77 分。为了提高 3 分, 则她需要平均分为 80 分。所以在经过 6 次考试后, 总分应为 480 分。而她目前总分为 385 分, 则她需要下次需

要考到至少 $480 - 385 = \boxed{\text{(E)} 95}$

第3题

考点: 算术

解答: 最小为 $(2-0.5) \times (3-0.5) = 1.5 \times 2.5 = 3.75$, 选 A.

第4题

考点: 算术

解答: 他们总共花费了 $A+B$ 美元, 因此 Leroy 应该分摊的费用是 $\frac{A+B}{2}$ 美元, 目前他已经支付了 A 美元, 则他还需要支付 Bernardo 的费用是 $\frac{A+B}{2} - A = \frac{B-A}{2}$, 选 C.

第5题

考点: 数论 (质因数分解)

解答: 因为 $161 = 7 \times 23$, 所以 $a = 32, b = 7$, 那么 $ab = 224$, 选 E.

Problem 6

考点: 算术

解答: 由题意, 第二天给了他妹妹 4 颗糖果后还剩 8 颗, 那么给之前有 12 颗, 这 12 颗是第二天 Casper 开吃前糖果量的 $\frac{2}{3}$, 所以第二天 Casper 开吃前糖果总共 18 颗, 也即是第一天剩余糖果的量。第一天给他弟弟之前共有 20 颗, 而这是最初糖果总量的 $\frac{2}{3}$, 因此最初糖果总量为 30 颗, 选 A.

Problem 7

考点: 代数

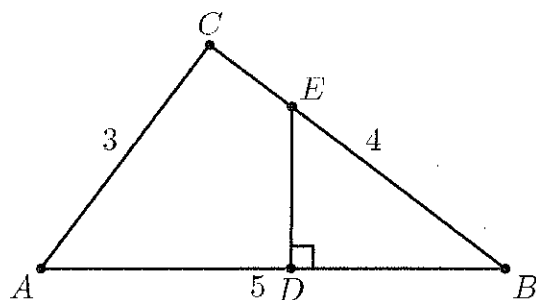
解答: 假设一个角为 x , 则另一个角为 $x+30$, 所以 $x+x+30 = 90 \cdot \frac{6}{5} = 108$, 解得, $x = 39$, 那么这个三角形的三个内角为: $39^\circ, 69^\circ, 72^\circ$, 最大的为 72° , 选 B.

Problem 8

考点: 逻辑推理

解答: 因为原命题和逆否命题是等价命题。因为原命题是: 若气温至少是 $80^\circ F$ 且晴朗, 则沙滩会挤满人, 则它的逆否命题是: 若沙滩不挤满人, 则气温低于 $80^\circ F$ 或者不晴朗。因此选 B.

Problem 9



考点：平面几何（相似三角形）

解答： $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ ，所以 $\left(\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BCA}}\right) = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2$ ，即 $\frac{1}{3} = \left(\frac{BD}{4}\right)^2$ ，解得， $BD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

选 D.

Problem 10

考点：等比数列

解答：最大元素为 10^{10} ，其他 10 个元素之和为

$$1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^9 = \frac{1 - 10^{10}}{1 - 10} = \frac{10^{10} - 1}{9}，\text{比值为 } \frac{10^{10}}{\frac{10^{10} - 1}{9}} = \frac{10^{10} \cdot 9}{10^{10} - 1} \approx 9，\text{选 B.}$$

Problem 11

考点：逻辑推理（鸽笼原理）

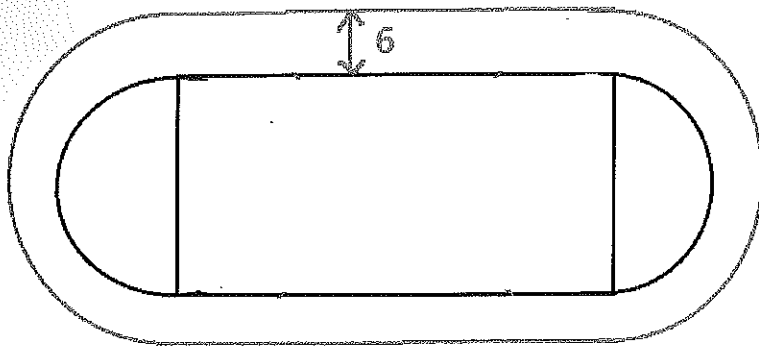
解答：假设有 52 个人你想放入 12 个箱子里，因为一年有 12 个月。由鸽笼原理，

其中一个盒子至少有 $\left\lceil \frac{52}{12} \right\rceil = 5$ 人，选 D.

Problem 12

考点：简单几何（圆的周长）+简单算术

解答：



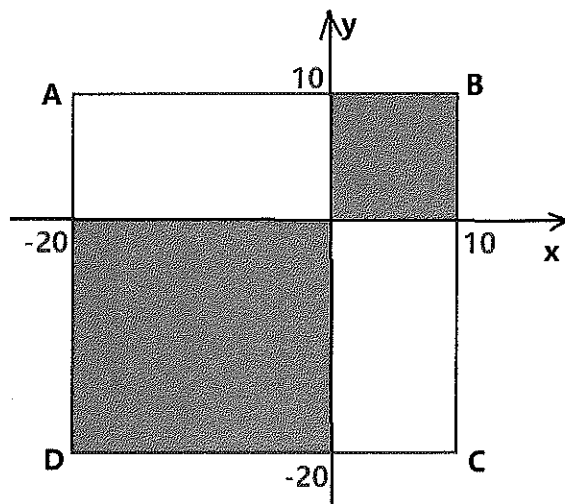
走外圈相对于内圈，多走的路程是两端大圆周长和小圆周长之差，这个差等于

$$2\pi(R-r) = 2\pi \cdot 6 = 12\pi, \text{ 假设速度为 } v, \text{ 则 } 12\pi = v \cdot 36, \text{ 所以 } v = \frac{12\pi}{36} = \frac{\pi}{3}, \text{ 选 A.}$$

Problem 13

考点：概率(几何概型)

解答：



这里的 2 个变量都是连续型随机变量，假设为 x 和 y ，因此点 (x, y) 的所有取值就组

成了上图中的矩形 ABCD，面积为 900。而当点位于图中所示阴影部分时，可以使

得乘积为正，阴影部分面积为 $100 + 400 = 500$ ，概率为 $P = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}$ ，选 D。

Problem 14**考点：**勾股定理，解方程**解答：**

令停车场长和宽分别为 a 和 b . 那么 $a^2 + b^2 = 625$ 且 $ab = 168$. 因此, 我们有

$$a^2 + 2ab + b^2 = 625 + 168 \times 2$$

$$(a + b)^2 = 961$$

$$a + b = 31$$

则周长为 $2(a + b) = 2(31) = \boxed{(C)62}$

Problem 15**考点：**算术（新的运算符号）

解答：将上面这些等式左右依次化简，看哪个是成立的：

$$\text{I. } x @ (y + z) = (x @ y) + (x @ z)$$

$$\frac{x + y + z}{2} = \frac{x + y}{2} + \frac{x + z}{2}$$

$$\frac{x + y + z}{2} \neq \frac{2x + y + z}{2}$$

$$\text{II. } x + (y @ z) = (x + y) @ (x + z)$$

$$x + \frac{y + z}{2} = \frac{2x + y + z}{2}$$

$$\frac{2x + y + z}{2} = \frac{2x + y + z}{2}$$

$$\text{III. } x @ (y @ z) = (x @ y) @ (x @ z)$$

$$x @ \frac{y + z}{2} = \frac{x + y}{2} @ \frac{x + z}{2}$$

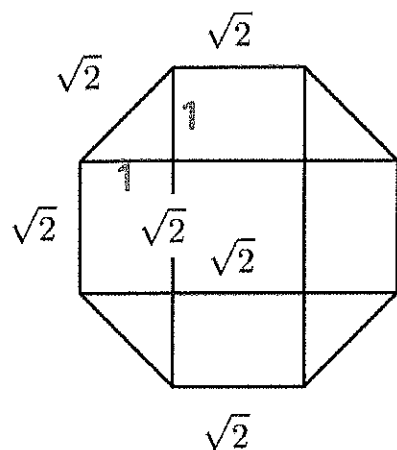
$$\frac{2x + y + z}{4} = \frac{2x + y + z}{4}$$

$\boxed{(E) \text{ II and III only}}$

Problem 16

考点：概率（几何概型）

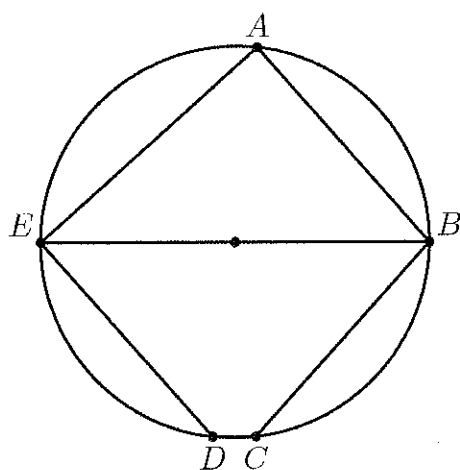
解答：只需要将中心正方形的面积除以飞镖盘的总面积即可。



假设正八边形的边长为 $\sqrt{2}$ ，上图标示了相关线段的长度，可得中间正方形面积为 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ，而飞镖盘的面积为： $2 + 2 + 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2}$ ，所以概率为：

$$P = \frac{2}{4 + 4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}, \text{选 A.}$$

Problem 17

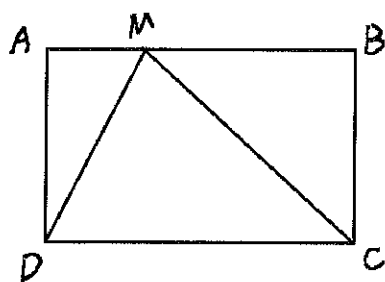


考点：平面几何

解答: 因为 EB 为直径, 所以 $\angle A=90^\circ$, 由此 $\angle ABE+\angle AEB=90^\circ$, 又因为 $\angle ABE:\angle AEB=5:4$, 所以 $\angle ABE=90^\circ \times \frac{5}{9}=50^\circ$ 。因为 $AB \parallel ED$, 所以 $\angle BED=50^\circ$ 。因为 $EB \parallel CD$, 所以梯形 EBCD 是个等腰梯形。因此 $\angle EBC=\angle BED=50^\circ$, 所以 $\angle BCD=180^\circ-50^\circ=130^\circ$, 选 C.

Problem 18

考点: 平面几何 (特殊直角三角形)



关键思路解析: 我们从 $\angle AMD=\angle CMD$ 入手. $\angle AMD$ 可以进行转化, 因为 $\angle AMD=\angle CDM$, 所以 $\angle CDM=\angle CMD$, 那么我们就得到 $CM=CD=6$, 而在直角三角形 CBM 中, $CB=3=1/2CM$, 所以这是个 30-60-90 的直角三角形, 下面就都清楚了.

解答: 由分析, $\angle CMB=30^\circ$, 所以 $\angle AMD=\angle CMD=75^\circ$

Answer: E

Problem 19

考点: 代数 (解一元二次方程)

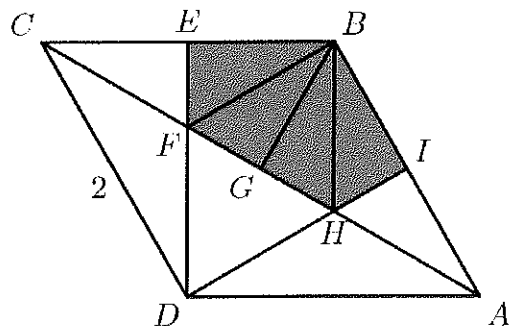
解答: 两边平方, 得到 $5|x|+8=x^2-16$, 即 $|x|^2-5|x|-24=0$, 分解因式,

$(|x|-8)(|x|+3)=0$, 得, $|x|=8$, 因此 $x=\pm 8$, 乘积为 -64, 选 A.

Problem 20

考点：平面几何（特殊直角三角形）

关键思路解析：



先看 C 和 B 的比较，点要离 B 更近，离 C 更远，我们先找出离临界位置，即距离这 2 点相等，就在线段 BC 的垂直平分线上(perpendicular bisector), 如上图 DE. 那么 DE 右边的点距离 B 更近，同理，比较 A 和 B，DI 是线段 BA 的垂直平分线，那么在 DI 的上方区域便是离 B 更近的点，最后比较 B 和 D，因为 ABCD 是菱形(Rhombus)，AC 便是 BD 的垂直平分线，AC 右边的区域的点离 B 更近. 这 3 个区域重叠的部分，如图中阴影部分的面积，便是所求.

解答：下面求阴影部分的面积. 整个阴影部分关于 BG 对称，所以我们只要求出四边形 BGHI 的面积，乘以 2 即可. BGHI 的面积可以看成是直角三角形 BGA 的面积减去直角三角形 AHI 的面积，这两个都是 30-60-90 的直角三角形.

$$S_{BGHI} = S_{\triangle ABG} - S_{\triangle AHI} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 那么阴影部分面积为: } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Answer: C

Problem 21

考点:代数

解答: $w-z$ 是所有的差中最大的, 因此 $w-z=9$ 。将这所有的差相加,

$$w-x+w-y+w-z+x-y+x-z+y-z=1+3+4+5+6=28, \text{ 即}$$

$3w+x-y-3z=28$, 将 $w-z=9$ 代入, 得 $x-y=1$ 。因此 $(w-x)$ 与 $(y-z)$ 之和为

8, 只可能是一个是 3, 另一个是 5。因此下面分类讨论。

①若 $w-x=3, y-z=5$, 则 $x=w-3, y=x-1=w-4, z=y-5=w-9$ 。因为

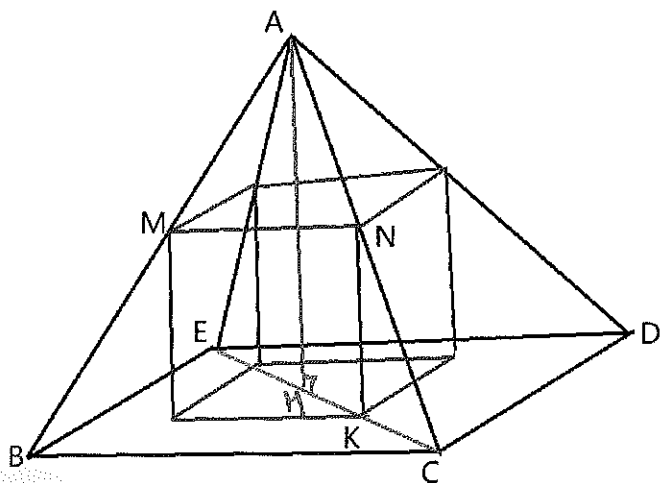
$$w+x+y+z=44, \text{ 代入得到, } w+w-3+w-4+w-9=44, \text{ 得到, } w=15。$$

②若 $w-x=5, y-z=3$, 则 $x=w-5, y=x-1=w-6, z=y-3=w-9$ 。因为

$$w+x+y+z=44, \text{ 代入得到, } w+w-5+w-6+w-9=44, \text{ 得到, } w=16。$$

所有可能的 w 值之和为 31, 选 B

Problem 22



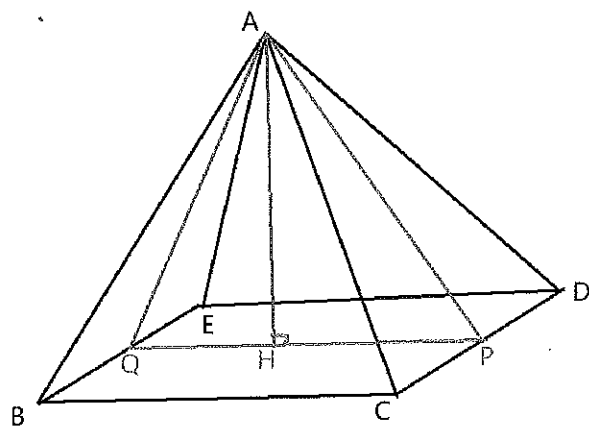
关键思路解析: 要求立方体的体积, 只需要算出边长即可。假设边长为 x 。在三角形

ABC 中, 因为 $MN \parallel BC$, 所以 $\frac{x}{1} = \frac{AN}{AC}$, 而等式右端的这个比例还可以在三角形

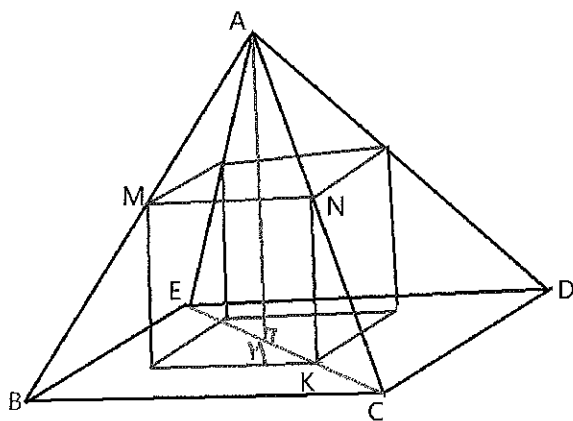
AEC 中进行转化, 若过 A 作 AH 垂直平面 $BCDE$, 则有相似, $\frac{AN}{AC}$ 这个关系式

还可以转化成 $NK=x$ 和 AH 的关系,如果能求出高 AH 的长度,那么就建立了关于 x 的方程,自然 x 就解出来了.所以下面我们首先求出椎体的高 AH .

解答:



和前面类似的分析思路和方法,取 CD 和 BE 的中点 P 和 Q ,连接 QP .因为 $BE \perp AQ$, $BE \perp AP$ (因为 $CD \perp AP$, $CD \parallel BE$),所以 $BE \perp$ 平面 APQ , 所以平面 $BCDE \perp$ 平面 APQ , 那么在平面 APQ 内所做的高 AH 即垂直平面 $BCDE$,所以 AH 为整个立体图形的高.在等腰 $\triangle APQ$ 中, $AQ = AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $PQ = 1$, 所以 $AH = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



再回到原图如上图, $\frac{CN}{CA} = \frac{NK}{AH} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}x$, 因此, $\frac{AN}{CA} = 1 - \sqrt{2}x$. 又因为 $\frac{x}{1} = \frac{AN}{AC}$,

所以 $x = 1 - \sqrt{2}x, x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$. 那么体积

为: $V = (\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$, 选 A。

Problem 23

考点: 数论 (模运算和欧拉定理)

关键思路分析: 这个数是一个幂(power), 要把底数(base)降低, 只需要用模运算的指数性质(exponentiation property), 要把指数(exponent)降下来, 可以用欧拉定理(Euler's theorem). 底数和指数都降下来之后, 后面就好办了.

解答: $2011^{2011} \equiv 11^{2011} \pmod{1000}$, 因为 $(11, 1000)=1$, $\varphi(1000) = 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 100$,

所以 $11^{100} \equiv 1 \pmod{1000}$, 因此 $11^{2011} \equiv 11^{11} \pmod{1000}$.

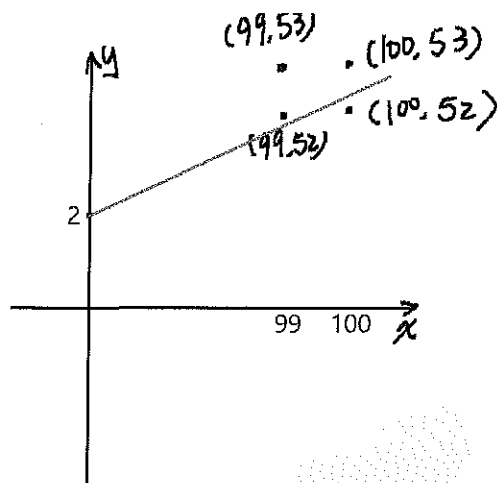
$$\begin{aligned} (10+1)^{11} &= 10^{11} + C_{11}^{10}10^{10} + C_{11}^9 10^9 + \dots + C_{11}^3 10^3 + C_{11}^2 10^2 + C_{11}^1 10^1 + 1 \pmod{1000} \\ &\equiv 5500 + 110 + 1 \\ &\equiv 5611 \pmod{1000} \\ &\equiv 611 \pmod{1000} \end{aligned}$$

选 D.

Problem 24

考点: 数形结合

关键思路解析: 注意到直线恒通过(0,2)这个点, 题目要求直线在绕着(0,2)这个点转动过程中, 不能碰到任何格点. 最有可能先碰到的格点肯定是最外面的点, 即 x 坐标为 99 或者 100 的点. 当直线



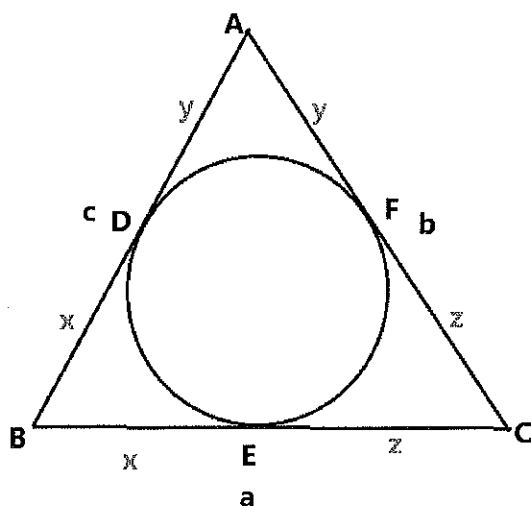
通过(100,52)这个点时,斜率为 $1/2$.那么当直线向上转动,最先可能碰到的只可能是(99,52)或者(100,53)这2个点.分别计算通过这2个点时,直线斜率哪个最小即可.

解答:当直线通过(99,52)这个点时,斜率为 $\frac{50}{99}$;当直线通过(100,53)这个点时,斜率为 $\frac{51}{100}$,因为 $\frac{50}{99} < \frac{51}{100}$,所以 $\frac{1}{2} < m < \frac{50}{99}$,选 B.

Problem 25

考点:平面几何+数列

解答:



如上图,设 $\triangle ABC$ 三边长分别为 $AB=c, BC=a, CA=b$,且

$BD=BE=x, CE=CF=z, AD=AF=y$, 则有下面方程:

$$\begin{cases} x+y=c \\ x+z=a \\ y+z=b \end{cases}, \text{解得}, \begin{cases} x = \frac{c+a-b}{2} \\ y = \frac{c+b-a}{2} \\ z = \frac{b+a-c}{2} \end{cases}.$$

看不出有什么简单的递推规律。因此此时将

$a=2011, b=2012, c=2013$ 代入, 算得 T_2 的三边长为:1005,1006,1007. 可以看到,

中间数变成一半,且仍然是3个连续的正整数。为了验证这一点,将

1005,1006,1007.再次代入公式,算得 T_3 的三边长分别为:502,503,504.确实:503是

1006的一半,且仍然是3个连续正整数。因此 T_{n+1} 的三边长

为: $\frac{2012}{2^n}-1, \frac{2012}{2^n}, \frac{2012}{2^n}+1$ 。要求能组成三角形,则需满足

$$\begin{cases} \frac{2012}{2^n}-1+\frac{2012}{2^n}+1>\frac{2012}{2^n} \\ \left(\frac{2012}{2^n}+1\right)-\left(\frac{2012}{2^n}-1\right)<\frac{2012}{2^n} \end{cases} \text{解得, } 2^{n+1}<2012, \text{ 所以 } n+1\leq 10, n\leq 9. \text{ 因此最}$$

多可以得到 T_{10} , 它的周长为: $3\times\frac{2012}{2^9}=\frac{1509}{128}$,选D.