

## 2012 AMC 10 A 解答

### 第1题

考点：算术

解答：5 分钟为 300 秒，因此这段时间内 Cagney 总共上霜  $\frac{300}{20} = 15$  个，而 Lacey 总共上霜  $\frac{300}{30} = 10$  个，因此 2 人总共上霜 25 个，选 D.

### 第2题

考点：平面几何

解答：一边不变，一边被分成两半，因此其中一个矩形的尺寸是  $4 \times 8$ ，选 E.

### 第3题

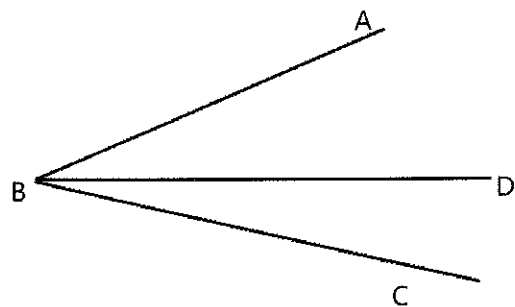
考点：算术

解答：爬的总长为  $4+11=15$ ，选 E.

### 第4题

考点：平面几何

解答：要使得  $\angle CBD$  最小，则图形如下图所示：



则  $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 24^\circ - 20^\circ = 4^\circ$ , 选 C.

### 第5题

考点: 算术

解答: 母猫有 50 只, 其中 25 只中每一只都一窝小猫, 所以小猫个数为  $4 \cdot 25 = 100$ , 那么猫和小猫的总数为  $100 + 100 = 200$ , 选 B.

### 第6题

考点: 代数

解答: 假设其中一个正整数是  $x$ , 则另一个为  $\frac{9}{x}$ , 那么  $\frac{1}{x} = 4 \cdot \frac{x}{9}$ , 解得,  $x = \frac{3}{2}$ , 则另一个数为 6, 它们的和为  $\frac{15}{2}$ , 选 D.

### 第7题

考点: 代数

解答: 假设原来球的总数为  $5k$ , 则蓝色为  $3k$ , 红色为  $2k$ . 现在红色为  $4k$ , 蓝色仍为  $3k$ , 则红色占了总数的  $\frac{4k}{7k} = \frac{4}{7}$ , 选 C.

### 第8题

考点: 算术

解答: 由题意, 三个数之和的 2 倍为:  $12 + 17 + 19 = 48$ , 则这 3 个数之和为 24. 那么这 3 个数为  $24 - 12 = 12$ ,  $24 - 17 = 7$ ,  $24 - 19 = 5$ . 中间的那个数是 7, 选 D.

### 第9题

考点：概率（分类讨论）

解答：因为  $7=1+6=2+5=3+4$ ，所以需要分类讨论。

①若一个是1，另一个是6，概率为  $P_1 = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$

②若一个是2，另一个是5，概率为  $P_2 = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$

③若一个是3，另一个是4，概率为  $P_3 = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$

因此总的概率为  $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{3}$ ，选 D.

### 第10题

考点：数列（等差数列）

解答：假设最小的扇形角度为  $x$  度，则这些圆心角为  $x, x+d, x+2d, \dots, x+11d$ . 它们和

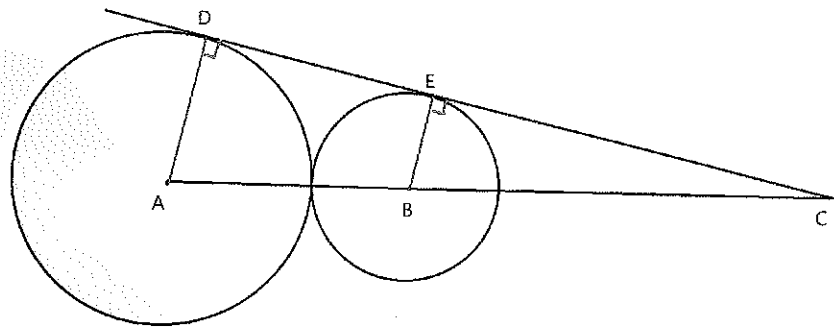
为 360，即  $\frac{(x+x+11d) \cdot 12}{2} = 360$ ，即  $2x+11d=60$ ，要使得  $x$  和  $d$  均为正整数，

则  $d=2, x=19$ ；或  $d=4, x=8$ ；因此  $x$  最小可能是 8，选择 C.

### 第11题

考点：平面几何（相似三角形）

解答：



由图知,  $\triangle CBE \sim \triangle CAD$ , 因此  $\frac{CB}{CA} = \frac{BE}{AD}$ , 即  $\frac{CB}{CB+8} = \frac{3}{5}$ , 解得,  $BE=12$ , 选 D.

## 第 12 题

考点: 数论 (模运算)

解答: 狄更斯为 1812 年 2 月 7 日出生, 从 1812 年到 2012 年, 是 4 的倍数的年份共有

$$\left\lfloor \frac{2012}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1812}{4} \right\rfloor = 503 - 453 = 50 \text{ 年, 而其中 1900 年不是闰年, 所以共 49}$$

年闰年, 这些年共有 366 天, 151 年平年, 这些年共 365 天. 因此从出生日到 2012

年 2 月 7 日共经过的天数为:  $366 \cdot 49 + 365 \cdot 151$ . 因此要求从 2012 年 2 月 7 日开

始向前推这么多天是星期几, 就是个求余问题:

$$2 - 366 \cdot 49 - 365 \cdot 151 \equiv 2 - 0 - 1 \cdot 4 \equiv -2 \equiv 5 \pmod{7}, \text{ 因此是个星期五, 选 A.}$$

## 第 13 题

考点: 代数

解答: 设这 5 个数字从左到右分别是  $a, b, c, d, e$ , 则迭代平均值

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} + d \\ & \frac{\frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} + d}{2} + e \\ \text{为: } & \frac{\frac{\frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} + d}{2} + e}{2} = \frac{a+b+2c+4d+8e}{16}, \end{aligned}$$

因此我们看到, 当  $a, b, c, d, e$  分别为

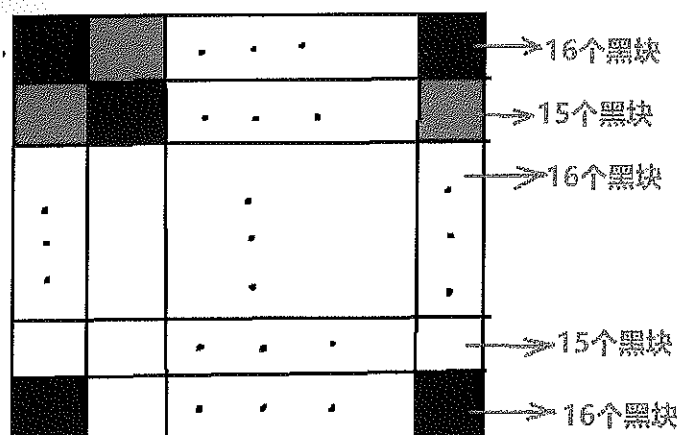
1, 2, 3, 4, 5 时, 迭代平均值最大, 为  $\frac{65}{16}$ ; 当  $a, b, c, d, e$  分别为 5, 4, 3, 2, 1 时, 迭代平均

值最小, 为  $\frac{31}{16}$ , 差为  $\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$ , 选 C.

## 第 14 题

考点: 算术

解答:



第一行中，“黑红”一共交替出现 15 次，最后一次是黑色，因此一共有 16 个黑块。

在第二行中，“红黑”一共交替出现了 15 次，最后一次是红色，因此一共有 15 个

黑块。从第 1 行到第 31 行，黑块的个数依次是 16,15,16,15,16,15, ..., 16,即 16

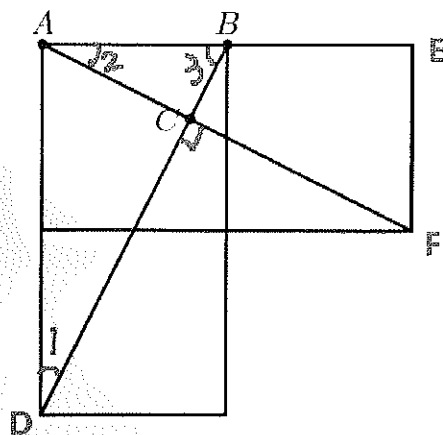
出现了 16 次，而 15 出现了 15 次，因此总的黑块数目是

$16 \times 16 + 15 \times 15 = 256 + 225 = 481$ ，选 B.

### 第 15 题

考点：平面几何(相似三角形面积之比，全等三角形)

解答:



容易得到,  $\triangle ABD \cong \triangle EFA$ , 所以  $\angle 1 = \angle 2$ , 因为  $\angle 1$  和  $\angle 3$  互余, 所以  $\angle 2$  和

$\angle 3$  也互余, 那么  $BD \perp AF$ 。所以  $\triangle ABC \sim \triangle AFE$ , 因此  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} = \left(\frac{AB}{AF}\right)^2$ , 即

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2, \text{ 得到, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{5}, \text{ 选择 B.}$$

## 第 16 题

考点: 数论 (整除)

解答: 假设他们跑了  $t$  秒, 则速度为 5.0 米每秒的运动员比速度为 4.8 米每秒的运动员在  $t$  秒内多跑了整数圈, 速度为 4.8 米每秒的运动员比速度为 4.4 米每秒的运动员在  $t$  秒内也多跑了整数圈, 因此

$$\begin{cases} 500 \mid 0.2t \\ 500 \mid 0.4t \end{cases}. \text{ 因为 } 500 \mid 0.2t = \frac{t}{5}, \text{ 所以 } t = 2500k, \text{ 此时 } 0.4t = 1000k \text{ 一定能被 } 500$$

整除。因此  $t$  最小为 2500, 选择 C.

## 第 17 题

考点: 代数 (代数变换, 解方程)

$$\text{解答: } \frac{a^3 - b^3}{(a-b)^3} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a-b)^3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{(a-b)^2} = \frac{73}{3}, \text{ 两边取倒数,}$$

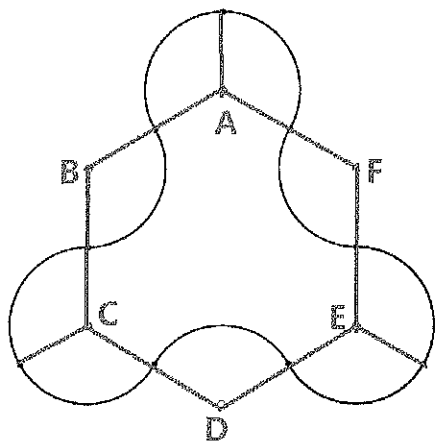
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1} = \frac{3}{73}, \text{ 令 } \frac{a}{b} = x, \text{ 即 } \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{3}{73}, \text{ 化简得, } (7x - 10)(10x - 7) = 0,$$

所以  $\frac{a}{b} = x = \frac{10}{7}$  (因为  $a > b$ ), 因此  $a = 10, b = 7, a - b = 3$ , 选 C.

### 第 18 题

考点：平面几何（扇形面积，正三角形面积）

解答：



将圆心连接形成上图正六边形  $ABCDEF$ 。由上图可以看到，原封闭图形的面积等于正六边形  $ABCDEF$  的面积加上 3 个圆心角为  $120^\circ$  扇形面积。因为六边形边长为 2，因此面积为  $S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = 6\sqrt{3}$ ，而圆心角为  $120^\circ$ ，半径为 1 的扇形面积为  $S_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{1}{3}\pi$ ，因此原图形的面积为： $S = S_{ABCDEF} + 3S_1 = 6\sqrt{3} + \pi$ ，选 E。

### 第 19 题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：设午餐时间是  $t$  小时。

因为“周三 Paula 自己一个人工作，早上 8:00 一直涂到晚上 7:12 把整个房子全部涂完（工作量是 26%）”，且工作了  $11.2-t$  小时，因此他的工作效率为  $\frac{26\%}{11.2-t}$  每小时。因为“周二 Paula 不在，两个助手总共仅涂了房子的 24%，下午 2:12 就下

班了”，2人总共工作了  $6.2-t$  小时，所以2人总的工作效率为  $\frac{24\%}{6.2-t}$ 。因为“周

一这一天这三人涂了房子的50%，在下午4:00下班”，三人共工作  $8-t$  小时，所

以  $\frac{26\%}{11.2-t}(8-t) + \frac{24\%}{6.2-t}(8-t) = 50\%$ ，接下来解出  $t$  即可，下面开始解方程：令

$x = 6.2 - t$ ，则变成  $\frac{13}{x+5}(1.8+x) + \frac{12}{x}(1.8+x) = 25$ ，

$\frac{13}{x+5}(x+5-3.2) + \frac{12}{x}(1.8+x) = 25$ ，所以  $\frac{13}{x+5}(x+5-3.2) + \frac{12}{x}(1.8+x) = 25$ ，即

$13 - \frac{41.6}{x+5} + \frac{21.6}{x} + 12 = 25$ ，即  $\frac{41.6}{x+5} = \frac{21.6}{x}$ ，解得， $x = 5.4 = 6.2 - t$ ，因此  $t = 0.8$  小

时，为48分钟，选D。

## 第20题

考点：概率

关键思路解析：顺时针旋转90度后，中间的格子和自身重合，所以它一定是黑色。

编号为1,2,3,4的4个格子，它们之间相互重合。而编号5,6,7,8的4个格子，也

是相互重合，情况一样。所以我们只需要考虑1,2,3,4这4个格子原先的涂色情况

即可。

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 4 | 5 |
| 3 |   | 1 |
| 7 | 2 | 6 |

根据题目要求，1,2,3,4相邻的格子一定不能同为白色。下面分3种情况分类讨论：

① 1,2,3,4中，没有白色的格子，即全黑，那么旋转后仍然全黑，符合题意。所

以1种涂色方法。



② 1,2,3,4 中, 有 1 个白色的格子, 那么旋转后这个白色的格子也变黑了, 其他黑的仍然黑, 符合题意. 所以  $C_4^1 = 4$  种涂色方法.

③ 1,2,3,4 中, 有 2 个白色的格子, 这 2 个白色格子一定是对立的格子, 要么是 1 和 3, 或者 2 和 4, 共 2 种可能. 旋转后变黑, 符合题意. 所以 2 种涂色方法.

所以编号 1,2,3,4 的格子共有 7 种涂色方法; 同样, 编号为 5,6,7,8 的格子也有 7 种

方法. 因此, 满足要求的涂色方法共有  $7 \times 7 = 49$  种方法. 而总的有  $2^9 = 512$  种方

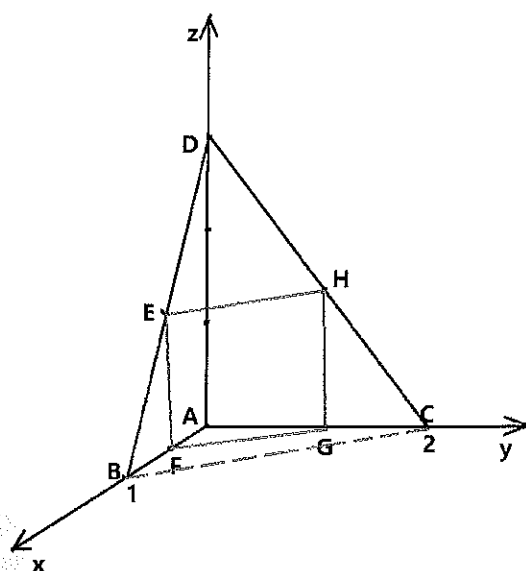
法. 概率为  $P = \frac{49}{512}$

解答: 概率为  $P = \frac{49}{512}$ , 选 A.

## 第 21 题

考点: 立体几何

解答:



如上图所示, EH 为  $\triangle BDC$  的中位线, 因此  $EH \parallel BC$ , 且  $EH = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。同理

FG 为  $\triangle ABC$  的中位线, 所以  $FG \parallel BC$ , 且  $FG = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 因此  $EH \parallel FG$ 。

同理, 因为 EF 和 GH 分别是  $\triangle BAD$  和  $\triangle CAD$  的中位线, 因此  $EF \parallel GH \parallel AD$ , 且  $EF = GH = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$ 。又因为  $AD \perp BC$ , 所以  $EF \perp FG$ , 因此四边形 EFGH 是

个矩形, 其面积为  $S = EF \cdot FG = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$ , 选 C。

## 第 22 题

考点: 数列 (等差数列) + 数论 (二次不定方程)

解答: 前  $m$  个正奇数为:  $1, 3, 5, 7, \dots, 2m-1$ , 和为  $\frac{2m \cdot m}{2} = m^2$ 。前  $n$  个正偶数为:

$2, 4, 6, 8, \dots, 2n$ , 和为  $\frac{(2n+2)n}{2} = n(n+1)$ 。因此  $m^2 - n(n+1) = 212$ , 化为关于  $n$  的二次

不定方程:  $n^2 + n - m^2 + 212 = 0$ ,  $n = \frac{-1 + \sqrt{4m^2 - 847}}{2}$ , 要使得  $n$  是个整数, 则

$4m^2 - 847 = k^2$  是个完全平方数。因此  $(2m+k)(2m-k) = 847 \cdot 1 = 7 \cdot 121 = 11 \cdot 77$  共 3

种可能性, 即

$$\begin{cases} 2m+k=847 \\ 2m-k=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2m+k=121 \\ 2m-k=7 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2m+k=77 \\ 2m-k=11 \end{cases} \text{ 分别解得 } \begin{cases} m=212 \\ k=423 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=32 \\ k=57 \end{cases} \text{ 或}$$

$$\begin{cases} m=22 \\ k=33 \end{cases}, \text{ 因此 } n = \frac{-1+k}{2} = 21, 28, 16 \text{ 共 3 个可能值, 它们的和为 } 255, \text{ 选 A。}$$

## 第 23 题

考点: 排列组合 (圆排列和分组方法)

关键思路解析: 因为每个人的朋友数目都一样, 但没说具体多少, 所以我们需要

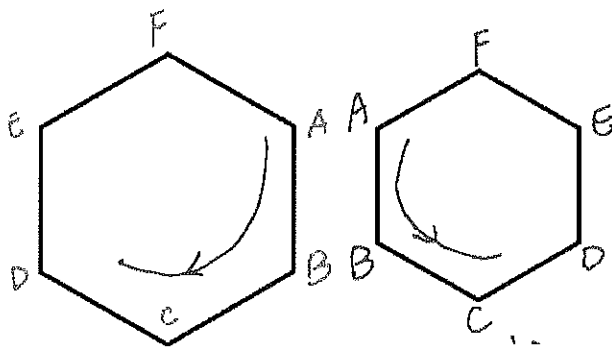
对朋友的数目进行分类讨论: 1. 他们都有 1 个朋友 2. 他们都有 2 个朋友. 3. 他们都有 3 个朋友; 4. 他们都有 4 个朋友. 对于第一种情况, 都有 1 个朋友, 即是把 6 个人分成 2,2,2 的 3 组, 每组 2 人的方法数. 对于第二种情况, 每人都有 2 个朋友, 即是把他们进行圆排列, 每个人和他的左右邻成朋友, 或者分成 3,3 的两组. 对于第 3 种情况, 每人都有 3 个朋友, 那么等价于每个人不和 2 人成朋友, 即和第 2 种情况一样. 类似的, 后面第 4 种情况也和第 1 种情况方法数一样.

**解答:** 下面对每种情况进行具体的计算.

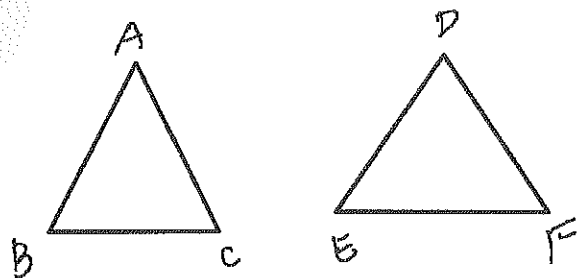
1. 他们每人都只有 1 个朋友, 等价于把 6 人分成 2,2,2 的三组, 一共有  $\frac{6!}{2!2!2!} = 15$  种方法.

2. 他们每个人都有 2 个朋友, 这里需要分 2 种情况:

① 6 个人进行圆排列, 不过这里和前面所讲的圆排列有些许不同: 原来标准的圆排列里, 比如 BF 在 A 的两边: B 在左边 F 在右边, 和 B 在右边 F 在左边, 如下图所示, 这两种圆排列虽然是不一样的, 但是在这道题是, 这 2 种情况, 都是 A 的朋友是 B 和 F, 结果是一样的. 所以我们这里总的方法数是在原来标准圆排列的方法数基础上再除以 2. 所以一共有  $\frac{5!}{2} = 60$  种方法.



② 还可能是 6 个人分成 3,3 的 2 个小组, 这种情况也能保证每人有 2 个朋友. 这是个分组问题, 一共有  $\frac{6!}{3!3!} = 10$  种方法.



综上, 每个人 2 个朋友的可能性一共有 70 种.

3. 他们都有 3 个朋友. 也就是和其他 2 人不成朋友, 这和第二种情况方法数一样, 也是 70 种.

4. 他们都有 4 个朋友, 也就是和 1 人不成朋友, 这和第一种情况一样, 所以是 15 种方法.

所以总的可能性是  $15+70+70+15=170$  种.

**Answer : B**

## 第 24 题

**考点: 数论(不定方程)**

**解答:** 将这 2 个不定方程相加,  $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=4$ , 即

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=4$ , 表明三个平方数之和为 4, 那么只可能是 1, 4, 9. 因

为  $a \geq b \geq c$ , 则必然  $(c-a)^2$  为三项中最大项, 因此  $a-c=3$ , 其他 2 项进行分类讨论.

① 若  $\begin{cases} a-c=3 \\ a-b=1 \\ b-c=2 \end{cases}$ , 则解得,  $b=a-1, c=a-3$ , 代入方程  $a^2-b^2-c^2+ab=2011$  中, 得到,  $a^2-(a-1)^2-(a-3)^2+a(a-1)=2011$ ,  $7a=2021$ , 则  $a$  不是整数, 矛盾.

②若  $\begin{cases} a-c=3 \\ a-b=2 \\ b-c=1 \end{cases}$ , 则解得,  $b=a-2, c=a-3$ , 代入方程,  $a^2-b^2-c^2+ab=2011$ , 得到,  $a^2-(a-2)^2-(a-3)^2+a(a-2)=2011$ , 解得,  $a=253$ , 选 E.

## 第 25 题

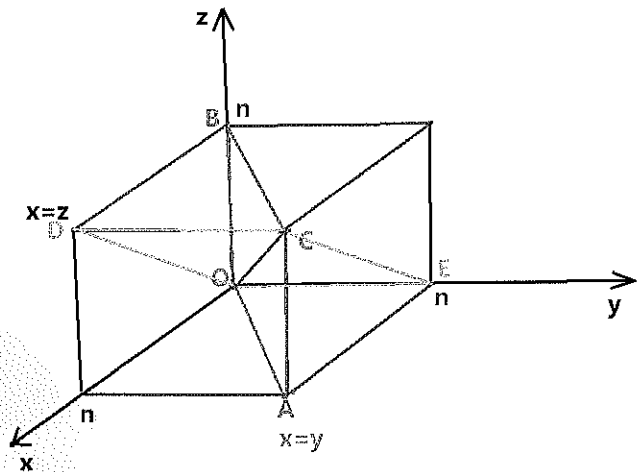
考点: 概率 (连续型随机变量)

解答: 这里有 3 个连续型随机变量, 因此建立三维坐标系。因为  $x, y, z$  三者地位等同, 为了讨论方便, 我们设  $k$  表示  $y < x < z$ , 且它们两两距离都大于 1 的概率。因为实际上  $y, z$  可以交换位置 (2 种可能性), 而且处于中间位置的变量可能是  $x, y$ , 或  $z$  (3 种可能性), 因此最后题设要求的概率  $P=6k$ 。

若  $y < x < z$ , 则只需满足下面不等式组

$$\begin{cases} y < x < z \\ x - y > 1 \\ z - x > 1 \end{cases}$$

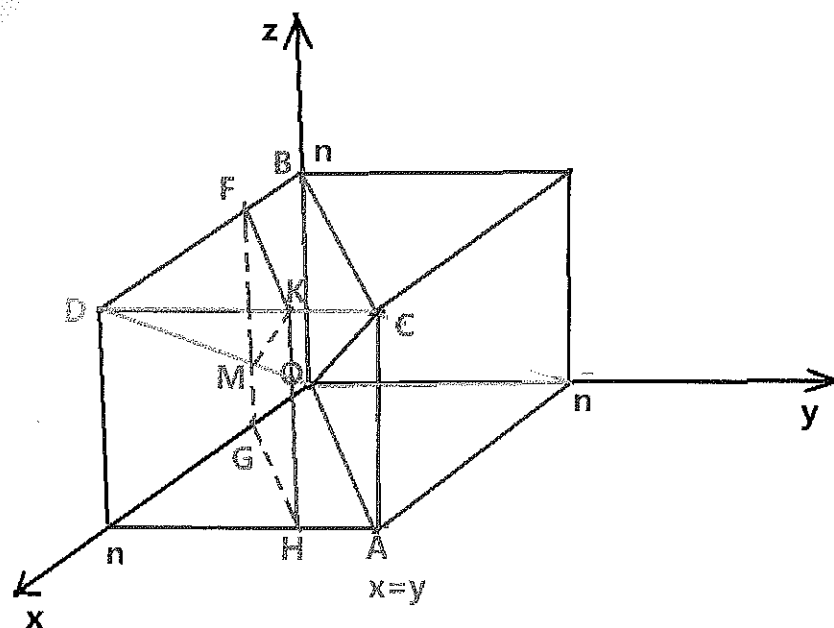
则  $y$  和  $z$  距离必然大于 1.



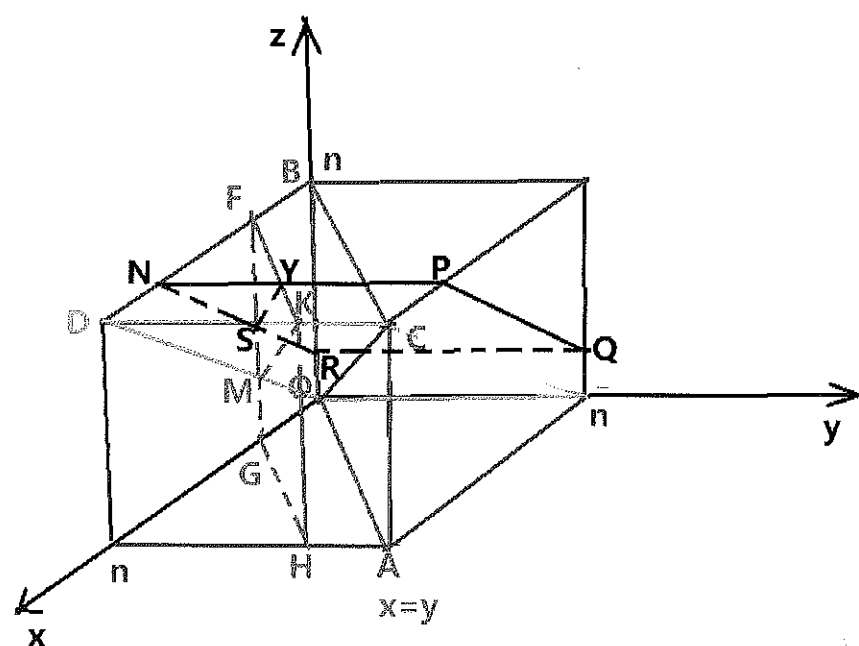
如上图所示, 建立三维坐标系, 三元组  $(x, y, z)$  的所有可能取值组成图示边长为  $n$

的立方体。  $y < x < z$  表示的空间图形为四面体  $O-DBC$ . 而  $x - y > 1$  表示平面  $x - y = 1$  的

左侧，即下图中平面 FKHG 的左侧，所以此时有效的空间为四面体 M-FKD。下面再考虑条件  $z-x>1$ 。



$z-x>1$  表示平面  $z-x=1$  的上方。下图中平面 NRQP 表示  $z-x=1$ ，四面体 M-FKD 位于平面 NRQP 上方的部分，即四面体 S-FNY，其中 S 为 NR 与 FG 的交点，Y 为 NP 和 FK 的交点。下面只要算四面体 S-FNY 的体积即可。



因为直线 GH 的方程为  $y=x-1$ , 因此  $RG=1$ , 所以  $BF=1$ , 因为直线 NR 方程为  $z-x=1$ ,

令  $z=n$ , 得到  $BN=n-1$ , 令  $x=1$ , 得到  $SG=2$ , 所以  $FS=n-2$ .  $FN=BN-BF=n-2$ , 因

为直线 FK 方程为  $y=x-1$ , 令  $x=n-1$ , 算得,  $NY=n-2$ . 因此四面体 S-NFY 的体积

为:  $V_{S-NFY} = \frac{1}{3} S_{\triangle NFY} \cdot FS = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot NF \cdot NY \cdot FS = \frac{1}{6} (n-2)^3$ , 所以概率

$k = \frac{V_{S-NFY}}{n^3} = \frac{1}{6} \frac{(n-2)^3}{n^3}$ , 那么  $P = 6k = \frac{(n-2)^3}{n^3}$ , 将选项中  $n=7, 8, 9, 10, 11$  依次从小

到大代入检验, 当  $n=10$  时,  $P = \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{64}{125} > \frac{1}{2}$ , 选择 D.