

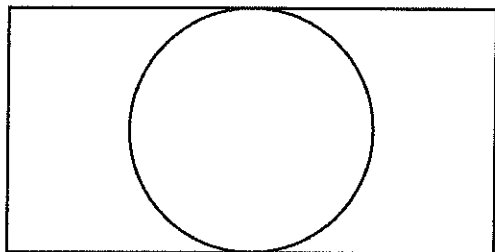
2012 AMC 10 B 解答

第1题

考点：算术

解答：每个三年级教室内学生数比兔子数多 16 个，那么 4 个三年级教室总共多了 64 个，选 C.

第2题



考点：平面几何

解答：由图知，矩形的宽等于圆的直径 10，则长为 20，那么面积为 200，选 E.

第3题

考点：解析几何(中点公式)

解答：若一个点关于 $y=2000$ 对称，则对称点横坐标不变，且这个点和对称点连线的中点在 $y=2000$ 上，因此对称点横坐标为 1000，假设纵坐标为 y ，则

$$\frac{y+2012}{2}=2000, \text{ 解得, } y=1988, \text{ 对称点为 } (1000, 1988), \text{ 选 B.}$$

第4题

考点：数论(模运算)

解答：由题意，Ringo 的玻璃球有 $6m+4$ 个，Paul 的玻璃球有 $6n+3$ 个，因此他们总共有 $6(m+n)+7$ 个玻璃球，每个包放 6 个， $6(m+n)+7 \equiv 1(\text{mod } 6)$ ，因此最后还剩 1 个，选 A.

第 5 题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设晚餐原本费用为 x 美元，那么小费为 $15\%x$ ，税费为 $10\%x$ ，因此 $x+15\%x+10\%x=27.5$ ，解得， $x=22$ ，选 D.

第 6 题

考点：算术

解答：因为估算 $x-y$ 的过程中， x 增大了， y 减少了，所以 $x-y$ 变大了，所以估计值比准确值要大，选 A。

第 7 题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设花栗鼠藏了 x 颗橡实，则 $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=4$ ，解得， $x=48$ ，选 D.

第 8 题

考点：代数（解不等式）

解答： $1 < x-2 < 5$ 或者 $-5 < x-2 < -1$ ，即 $3 < x < 7$ 或者 $-3 < x < 1$ ，所以整数 $x=4, 5, 6, -2, -1, 0$ ，它们的和为 12，选 B.

第 9 题

考点：数论（奇偶性）

解答：一开始的 2 个整数和为 26，可能是 2 个偶数相加，因此奇数个数为 0 个；再加上 2 个整数后，总和为 41，则这 2 个整数和为 15，必定一奇一偶；再加最后 2 个整数，总和为 57，则这最后 2 个整数和为 16，可能是 2 个偶数相加。综上，这 4 个数中，奇数最少为 1 个。选 A.

第 10 题

考点：数论（因子个数定理）

解答： $MN=36$ ，说明 M 是 36 的一个正因子，对于每个 M ，则 N 能唯一确定。因为 $36=2^2 \cdot 3^2$ ，所以 36 的正因子共有 9 个，选 D。

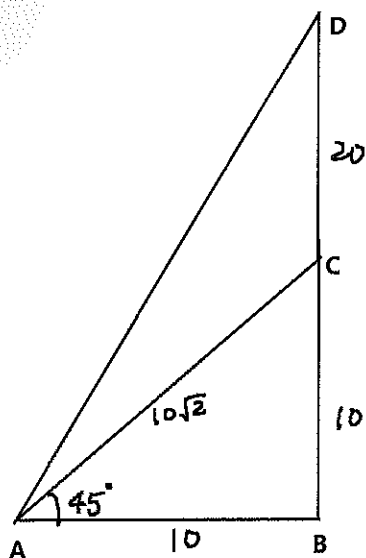
第 11 题

考点：乘法原理

解答：因为周五只有 1 种可能，是蛋糕，因此周四和周六除了蛋糕不能选，各有 3 种可能。周三不能和周四一样，也有 3 种可能。周二与周三不一样，也有 3 种可能。周一和周二不一样，也有 3 种可能，周日和周一不一样，也有 3 种可能。根据乘法原理，一共有 $3^6=729$ 种不同的甜点菜单，选 A.

第 12 题

考点：平面几何（特殊直角三角形，勾股定理）



解答: 因为直角 $\triangle ABC$ 是个等腰直角三角形, 且斜边 $AC=10\sqrt{2}$, 则

$AB=BC=10$, 所以 $DB=30$, 因此 $AD=\sqrt{10^2+30^2}=\sqrt{1000}$, 因为

$31=\sqrt{961}<\sqrt{1000}<\sqrt{1024}=32$, 因此选 B.

第 13 题

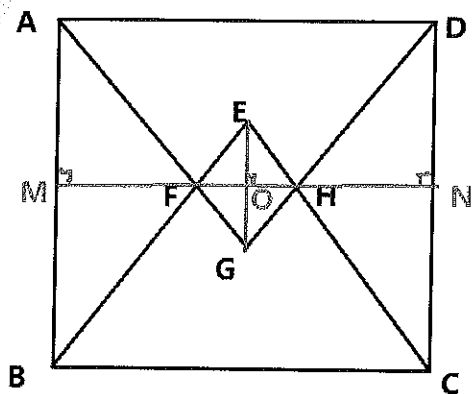
考点: 代数

解答: 假设 Clea 站在电梯不动时, 从电梯上下来需要 x 秒, 那么电梯秒了运行了总长的 $\frac{1}{x}$; 因为电梯不运行时, Clea 从电梯走下来需要 60 秒, 则 Clea 每秒走了电梯总长的 $\frac{1}{60}$ 。因此当电梯和 Clea 同时在动时, Clea 从电梯上下来每秒走电梯总长的 $(\frac{1}{x} + \frac{1}{60})$, 24 秒后走完全程, 因此 $(\frac{1}{x} + \frac{1}{60}) \cdot 24 = 1$, 解得, $x = 40$, 选 B.

第 14 题

考点: 平面几何(特殊直角三角形)

解答:



设直线 FH 与边 AB 和 CD 分别交于点 M 和 N , 且和直线 AC 交于点 O 。在直角 $\triangle AMF$ 中, 因为 $\angle MAF=30^\circ$, $AM=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$, 所以 $FM=1$, 同理 $HN=1$, 那么 $FH=2\sqrt{3}-2$, $FO=\sqrt{3}-1$ 。而在直角 $\triangle FEO$ 中, $\angle FEO=30^\circ$, 所以 $EO=\sqrt{3}FO=3-\sqrt{3}$, 那么 $EG=2\cdot EO=2(3-\sqrt{3})$, 所以菱形 $EFGH$ 的面积为:

$$S_{EFGH}=\frac{1}{2}\cdot FH\cdot EG=\frac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cdot 2(3-\sqrt{3})=8\sqrt{3}-12, \text{ 选 D.}$$

第 15 题

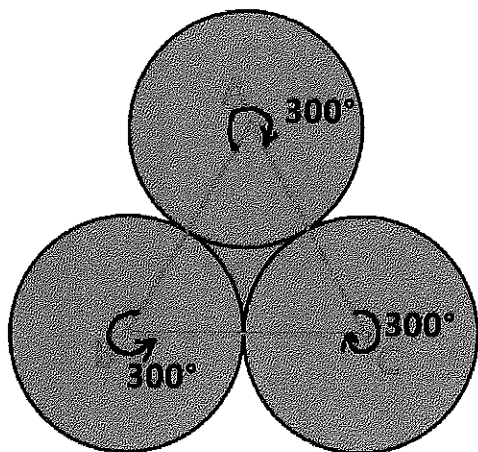
考点: 排列组合

解答: 6 支队伍两两比赛, 总共需要比赛 $C_6^2=15$ 场, 所以所有队伍赢得的场数的总和必须是 15。要使得并列第一的队伍尽可能多, 那么就要求并列第一的这些队伍赢得的场数尽可能少。我们就从最小的数开始尝试。若并列第一的队伍都是赢的 1 场比赛, 那么 6 支队伍总共赢得 6 场比赛, 与 15 产生矛盾; 若并列第一的队伍都是赢的 2 场比赛, 那么 6 支队伍总共赢得 12 场比赛, 与 15 产生矛盾; 若并列第一的队伍都是赢的 3 场比赛, 那么 5 支队伍总共赢得 15 场比赛, 此时让第 6 支队伍赢得 0 场比赛, 即可满足要求。因此排名并列第一的队伍最多是 5 支, 选 D。

第 16 题

考点：平面几何

解答：



连接三个圆的圆心如上图所示，则阴影部分面积等于正 $\triangle ABC$ 的面积加上3个圆心角为 300° 的扇形面积。

其中一个圆心角为 300° ，半径为2的扇形面积为： $S_1 = \frac{5}{6}\pi \cdot 2^2 = \frac{10}{3}\pi$ 。正 $\triangle ABC$ 的面积为： $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$ 。所以阴影部分面积为： $S = 3S_1 + S_2 = 10\pi + 4\sqrt{3}$ ，选A。

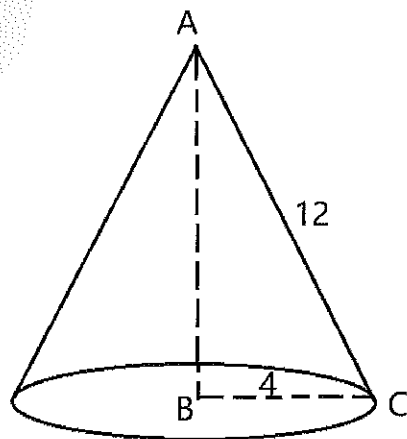
第 17 题

考点：立体几何

解答：

小的扇形的弧长为 $s = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 12 = 8\pi$ ，则围成的圆锥的底面圆的半径为 $r = \frac{s}{2\pi} = 4$ ，

如下图所示：



在直角三角形 ABC 中, 求得 $AB = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$ 。因此小圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 8\sqrt{2}.$$

同理, 因为大的扇形的弧长为 $s' = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 12 = 16\pi$, 则围成的圆锥的底面圆的半

径为 $r = \frac{s}{2\pi} = 8$, 则圆锥的高为 $H = \sqrt{12^2 - 8^2} = 4\sqrt{5}$ 。因此大圆锥的体积为

$$V' = \frac{1}{3}\pi \cdot 64 \cdot 4\sqrt{5}. \text{ 那么小圆锥和大圆锥的体积之比为 } \frac{V}{V'} = \frac{8\sqrt{2}}{4 \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}. \text{ 选 C.}$$

第 18 题

考点: 条件概率

解答: 用 A 表示测试结果为阳性的概率, B 表示有这种病的概率。那么根据条件概率, 有

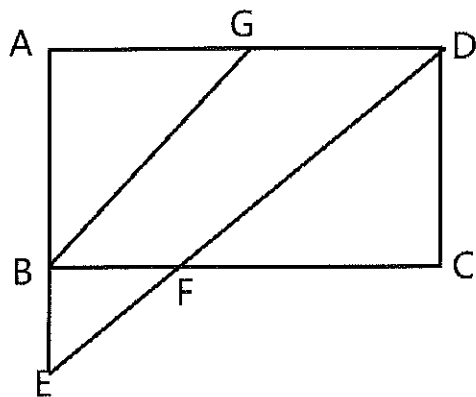
$$p = P(B|A) = \frac{P(B \& A)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})} = \frac{\frac{1}{500} \cdot 1}{\frac{1}{500} \cdot 1 + \frac{499}{500} \cdot 2\%} = \frac{50}{549} \approx \frac{50}{550} = \frac{1}{11}$$

因此选择 C.

第 19 题

考点: 平面几何

解答:



因为 $BE \parallel CD$, 所以 $BF:CF = BE:CD = 2:6 = 1:3$, 所以 $BF = \frac{1}{4}BC = \frac{15}{2}$, 所以梯形

BFDG 的面积为 $\frac{(BF+DG) \cdot AB}{2} = \frac{(\frac{15}{2}+15) \cdot 6}{2} = \frac{135}{2}$, 选 C.

第 20 题

考点: 代数

解答: 假设初始值为 x , 当 Bernardo 操作了 3 次后, 得到的数为

$2(2(2x+50)+50) = 2^3x + 2^2 \cdot 50 + 2 \cdot 50$. 以此类推, 我们可以得到, 当 Bernardo 操

作了 n 次后, 得到的数为

$2^n x + 2^{n-1} \cdot 50 + 2^{n-2} \cdot 50 + \dots + 2 \cdot 50 = 2^n x + 50 \cdot \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n x + 100(2^{n-1}-1)$, 这个数

小于 1000, 即, $2^n x + 100(2^{n-1}-1) < 1000$, 而把这个结果给了 Silvia 后, 得到结果

$2^n x + 100(2^{n-1}-1) + 50 = 2^n x + 100 \cdot 2^{n-1} - 50 \geq 1000$, 因此得到以下不等式组:

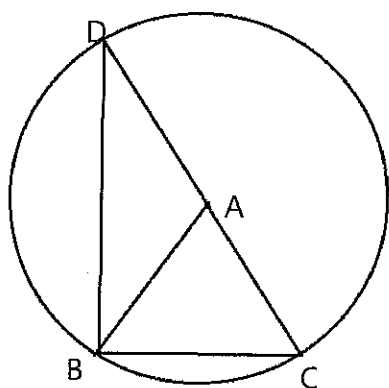
$$\begin{cases} 2^n x + 100(2^{n-1} - 1) < 1000, \\ 2^n x + 100 \cdot 2^{n-1} - 50 \geq 1000 \end{cases}$$

解得, $\frac{1050}{2^n} - 50 \leq x < \frac{1100}{2^n} - 50$, 要使得 x 尽可能小, 则 n 尽可能大。要使得 x 为非负数, n 最大为 4, 此时 $15\frac{5}{8} \leq x < 18\frac{3}{4}$, 因此 x 能取到的最小正整数为 16. $1+6=7$, 选 A

第 21 题

考点: 平面几何

解答:



4 个点两两连线形成 6 条边, 因为其中有 4 条边相等, 那么一定存在其中 3 个点两两相邻形成边长为 a 的等边三角形, 如图中 $\triangle ABC$ 。因为第 4 个点和其中一个顶点(例如 A 点)距离为 a , 则 D 在以 A 为圆心, a 为半径的圆上, 而还需要满足 D 和 C(或 B)距离为 $2a$, 则 DC 即为直径。连接 DB, 那么 $b = DB$ 。在直角 $\triangle DBC$ 中, 因为 $DC = 2a, BC = a$, 则 $b = DB = \sqrt{3}a$ 。所以 $b:a = \sqrt{3}$, 选 A。

第 22 题

考点: 排列组合

思路分析: 我们先来写一个例子看看规律。

7 6 8 5 9 10 4 3 2 1

先考虑最大数或最小数, 因为它们有一侧数字不在列表里, 如 10。若把 10 放在第 6 位, 因为不存在 11, 所以 9 一定在 10 的前面, 则在第 1~5 位中选一位放 9, 例如放在第 5 位。此时 8 一定在 9 的前面, 则在第 1~4 位里选一位放 8, 例如放在第 3 位。此时 7 一定放在 8 的前面, 则在第 1~2 位里选一位放 7, 例如放在第一位。而一旦第一位数字确定下来, 则剩下的位置只能从右向左依次按照由小而大的顺序放剩余的数字, 只有 1 种放法。因此从此例中我们看到, 一旦第一位确定, 例如为 i , 则比第一位大的数字有 $10-i$ 个, 然后再从剩下的 9 个位置中选 $10-i$ 个位置从左向右按照从小到大的顺序依次放入, 有 C_9^{10-i} 种方法。最后再将比第一位小的所有数字从右向左按照从小到大的顺序依次填满剩余空位, 只有 1 种方法。因此总共有 C_9^{10-i} 。下面我们要对 i 的取值进行分类讨论。

解答: 由上述分析, 我们要求, 当 i 从 1 到 10 取值时, 所有的方法数之和。

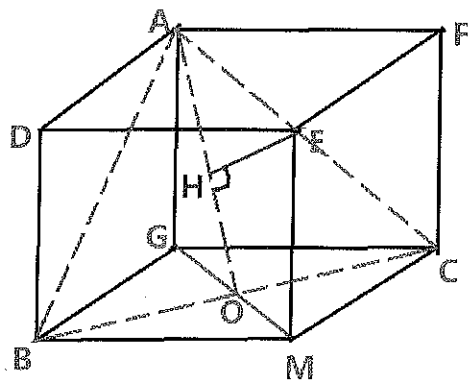
因此总的可能性为 $\sum_{i=1}^{10} C_9^{10-i} = C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + \dots + C_9^9 = 2^9 = 512$ 种。选择 B。

点评: 对于某些排成一列的排列组合问题, 我们一般考虑两端的情况, 因为两端的数字只有一侧有邻居, 情况数比较少。

第 23 题

考点: 立体几何 (纯几何方法或坐标法)

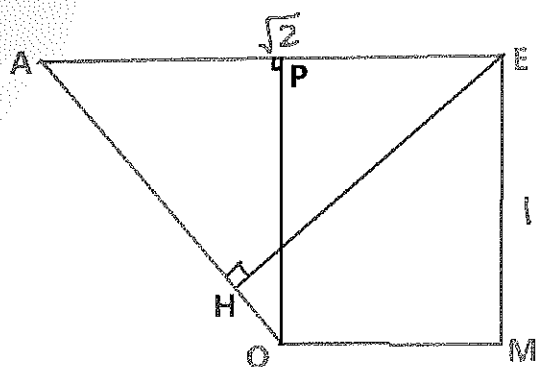
解答: 方法 1, 纯几何方法



平面 ABC 为其中一个切面, 将四面体 $G-ABC$ 切掉后, 剩余立体图形的底面 ABC 放在桌面上, 桌上方的顶点为 D, M, F 和 E 。其中顶点 D, F, M 距离底面 ABC 高度相等, 因此我们只需要比较 D 点和 E 点分别距离底面 ABC 的高度, 较大者即为这个物体的高度。

计算 D 点的高度, 利用体积法。因为 $V_{D-ABC} = V_{C-ABD}$, 即 $\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABD} \cdot CG$,
即 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$, 解得, D 到平面 ABC 的高度 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

过 E 作 $EH \perp AO$, 下面证明 $EH \perp$ 平面 ABC : 因为 $BC \perp GM$, $BC \perp EM$, 且 GM 与 EM 交于点 M , 所以 $BC \perp$ 平面 $AGME$ 。因此平面 $AGME$ 垂直平面 ABC , 而 $EH \perp$ 交线 AO , 因此 $EH \perp$ 平面 ABC 。下面在梯形 $AOME$ 中求 EH 。



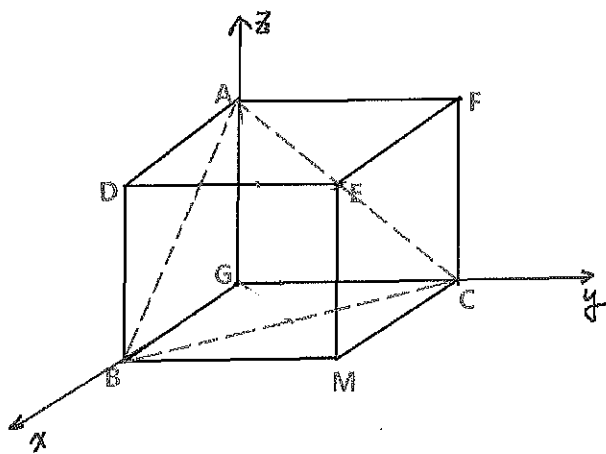
如上图所示, 过 O 作 $OP \perp AE$, 则在直角 $\triangle AOP$ 中, $PO=1, AP=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 那么

$$AO=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \text{ 因为 } AE \cdot PO = AO \cdot EH, \text{ 即 } \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot EH, \text{ 得, } EH = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} > h,$$

所以物体的高度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 选择 D。

方法 2, 坐标法

因为要求 E 点到平面 ABC 的距离, 则建立下图所示坐标系。



平面 ABC 的方程为: $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$, 即 $x + y + z - 1 = 0$, 而 $E(1,1,1)$, 利用点到平面的

距离公式 (此公式在店内 AMC12/10 教材上有描述) 得, $\frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 选

择 D.

第 24 题

考点: 排列组合(分组方法)(分组方法这个技巧在店内 AMC12/10 的教材里有详细描述)

思路解析: 可以看成把 4 首歌分配给 AB, BC, 和 AC 组成的 3 个小组(分配给某个小组表明这个小组的 2 个人喜欢这首歌). 这样子就需要分类讨论了. ① 4 首歌中选择 3 首, 然后分配给这 3 个小组, 剩下一首歌可能每个人都不喜欢, 或者只有 1 人喜欢 ② 4 首歌首先分成 2, 1, 1 的 3 组, 然后分配给这 3 个小组. 即, 先对歌分组, 再分配.

解答:

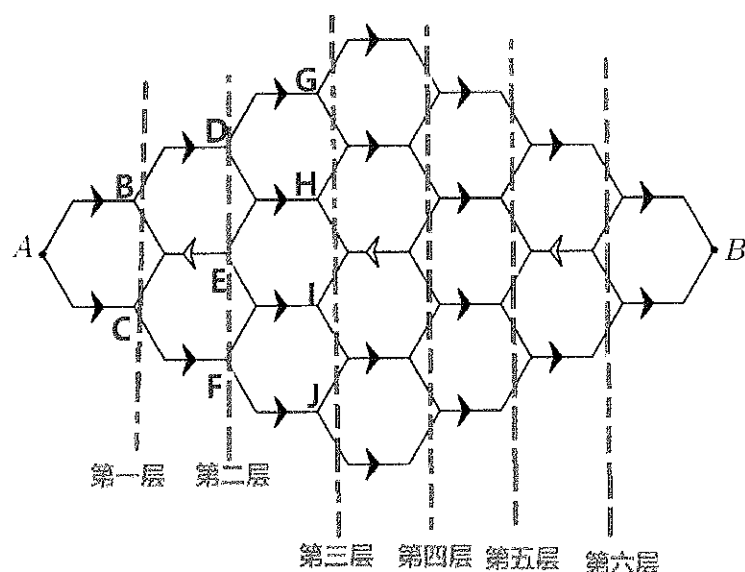
① 4 首歌中选择 3 首, 然后分配给这 3 个小组: $A_4^3 = 24$ 种; 剩下一首可能每个人都不喜欢(1 种), 或者只有 1 人喜欢(3 种), 共 4 种情况. 所以总共 $24 \cdot 4 = 96$ 种情况.

② 4 首歌首先分成 2, 1, 1 的 3 组: 共有 $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 种分配方法; 再分配给 3 个小组: $3! = 6$ 种; 所以总共 36 种.

综上, 总共 $96 + 36 = 132$ 种, 选择 B

Answer : B

第 25 题



考点:排列组合(路径分层)

关键思路解析: 对于这种路径问题,采取分层可避免思路混乱.问题的关键是,如何分层?分层的依据是各个层方法数之间没有影响,即前一层具体采用什么路径不对后一层的方法数产生影响,这样便于运用乘法原理.通过观察可以发现,只要含有空心箭头的那一层,具体采取什么样的路径会对通过下一层的方法数产生影响,那么含有空心箭头的那一层就不能和下一层分开,而应合并为同一层.举例来说,第二层和第三层应该合并.即应该直接计算从第一层到第三层的方法数.因为从B点到F点具体采取什么样的路径,会对从F点到第三层的方法数产生影响:若以BCF这样的路径(不通过空心箭头)到F,那么从F到第3层有4种路径可选;但是若是以BDEC F这样的路径(通过空心箭头)到F,那么因为D→E已经被走过,所以从F到第3层只有2种路径可选(即F→I或F→J).因此第2层和第3层应该合并.类似的,第4层和第5层需要合并,第6层和B点(最后一层需要合并).下面分层计算方法数.

1. 从 A 点到第一层, 共 2 种方法. B 点和 C 点地位等同.
2. 从第 1 层到第 3 层, 根据是否通过空心箭头, 分 2 种情况考虑. 如不通过空心箭头, 则总共 $2 \times 4 = 8$ 种方法. 若通过空心箭头, 因为 B 点和 C 点等同, 我们以 B 为例, 那么有 BDEC F 这 1 种路径到 F, 从 F 到第 3 层有 2 种方法, 所以共 $1 \times 2 = 2$ 种方法. 因此从第 1 层到第 3 层, 总共有 $8 + 2 = 10$ 种方法.
3. 类似的, 从第 3 层到第 5 层, 因为点 G, H, I, J 这 4 点等同, 以 G 为例, 若不通过空心箭头, 一共有 $4 \times 4 = 16$ 种路径; 若通过空心箭头, 则一共有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 种, 所以从第 3 层到第 5 层共有 $16 + 8 = 24$ 种方法.
4. 从第 5 层到 B 点, 如不通过空心箭头, 一共有 $2 \times 2 = 4$ 种方法, 若通过空心箭头, 则有 $1 \times 1 = 1$ 种方法. 所以共有 $4 + 1 = 5$ 种方法.

根据乘法原理, 总共有 $2 \times 10 \times 24 \times 5 = 2400$ 种方法.

Answer: E