

2013 AMC 10 A 解答

第1题

考点: 算术

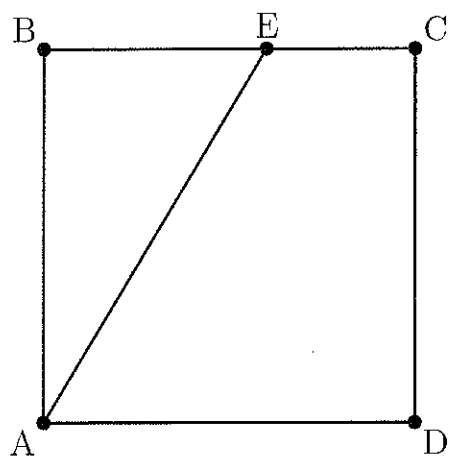
解答: $1.5 + 0.25 \cdot 5 = 1.5 + 1.25 = 2.75$, 选 C.

第2题

考点: 算术

解答: $2\frac{1}{\frac{2}{\frac{1}{4}}} = 10$, 选择 B.

第3题



考点: 平面几何

解答: $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AB = \frac{1}{2} BE \cdot 10 = 40$, 解得, $BE=8$. 选 E.

第4题

考点: 算术

解答: 得分是对手分数的2倍的比赛的得分一定是偶数, 因此只能是2,4,6,8,10. 对应地, 对手得分为1,2,3,4,5. 另外, 这支垒球队其他5场得分是1,3,5,7,9, 因为比对手少1分, 所以对手相应得分为2,4,6,8,10. 那么对手总得分为
 $1+2+3+4+5+2+4+6+8+10=45$. 选择 C.

第5题

考点: 简单算术

解答: 平均每人应该支付 $\frac{105+125+175}{3}=135$ 美元, 因此 $t=135-105=30$ 元,
 $d=135-125=10$ 美元. 那么 $t-d=20$, 选择 B.

第6题

考点: 逻辑推理

解答: 因为年龄和为16可能是3和13, 或5和11或7和9, 但5岁的待在家里, 所以只可能是3和13或7和9. 若是7和9出去看电影, 则去打棒球的两个年龄小于10岁的孩子只能从3,11和13中选, 产生矛盾. 因此是3和13出去看电影, 7和9出去打棒球, 剩下5和11, 那么Joey是11岁. 选 D.

第7题

考点: 排列组合 (分类讨论或者反面考虑)

解答:英语已经选定,再从剩下的5门里选择3门一共有 $C_5^3 = C_5^2 = 10$ 种方法。而这10种方法中,不选数学课只有1种方法,因此选择至少一门数学课的方法数是9种。选C。

第8题

考点: 算术

解答: $\frac{2^{2014} + 2^{2012}}{2^{2014} - 2^{2012}} = \frac{2^{2012}(5)}{2^{2012}(3)} = \frac{5}{3}$, 选C。

第9题

考点: 算术

解答:假设三分球的尝试次数为 x 次,二分球的尝试次数为 y 次,那么 $x+y=30$ 。那么总得分为 $x \cdot 20\% \cdot 3 + y \cdot 30\% \cdot 2 = 0.6(x+y) = 18$ 分,选择B。

第10题

考点: 代数

解答:假设粉色花总共 x 朵,那么粉色玫瑰有 $\frac{1}{3}x$ 朵,粉色康乃馨是 $\frac{2}{3}x$ 。设红色花总共 y 朵,那么红色康乃馨 $\frac{3}{4}y$, 红色玫瑰是 $\frac{1}{4}y$ 朵。因为所有花的十分之六为粉色,即 $(x+y) \cdot \frac{6}{10} = x$, 化简得, $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, 设 $x=3k, y=2k$, 那么康乃馨占了所

有花的 $\frac{\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y}{x+y} = \frac{2k + \frac{3}{2}k}{3k + 2k} = \frac{7}{10} = 70\%$, 选E。

第 11 题

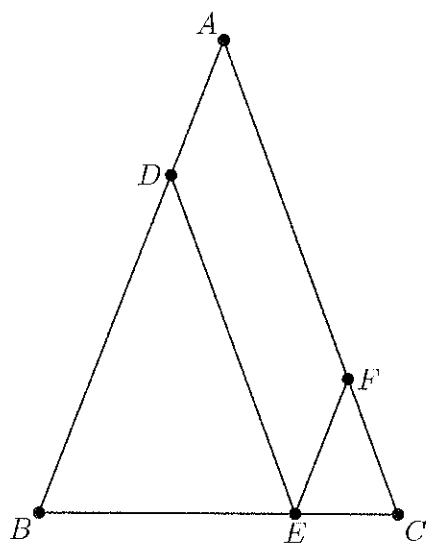
考点: 排列组合

解答: 设所有成员的个数为 x 个, 因为从中选择 2 人有 10 种方法, 因此

$$C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2} = 10, \text{ 解得 } x=5. \text{ 那么为计划委员会选择 3 人总共有 } C_5^3 = 10 \text{ 种方法,}$$

选 A.

第 12 题



考点: 平面几何+等效转化

解答: 因为 $AB=AC$, 所以 $\angle B=\angle C$, 又因为 $DE\parallel AC$, 所以 $\angle DEB=\angle C$, 因此

$\angle B=\angle DEB$, 那么 $DE=DB$ 。同理可得, $EF=FC$ 。所以平行四边形的周长为

$$AD+DE+EF+FA=AD+DB+FC+FA=AB+AC=56, \text{ 选 C.}$$

第 13 题

考点: 数论(整除)

解答: 因为不能被 5 整除, 且百位和个位相等, 则它们只能同时等于 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9,

下面分类讨论.

若它们同时等于 1, 则十位从 0~9 中选(10 种可能)可以满足各个位数字之和小于 20.

若它们同时等于 2, 则十位从 0~9 中选(10 种可能)可以满足各个位数字之和小于 20.

若它们同时等于 3, 则十位从 0~9 中选(10 种可能)可以满足各个位数字之和小于 20.

若它们同时等于 4, 则十位从 0~9 中选(10 种可能)可以满足各个位数字之和小于 20.

若它们同时等于 6, 则十位从 0~7 中选(8 种可能)可以满足各个位数字之和小于 20.

若它们同时等于 7, 则十位从 0~5 中选(6 种可能)可以满足各个位数字之和小于 20.

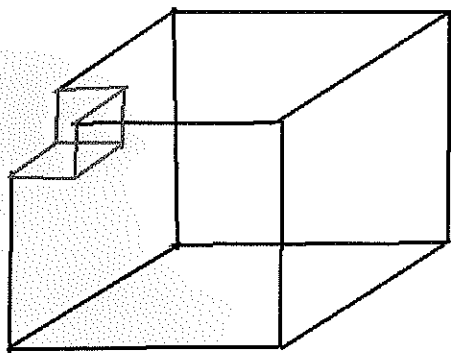
若它们同时等于 8, 则十位从 0~3 中选(4 种可能)可以满足各个位数字之和小于 20.

若它们同时等于 9, 则十位从 0~1 中选(2 种可能)可以满足各个位数字之和小于 20.

因此, 综上, 总共有 $2+4+6+8+10+10+10+10=60$ 个这样的三位数. 选 B.

第 14 题

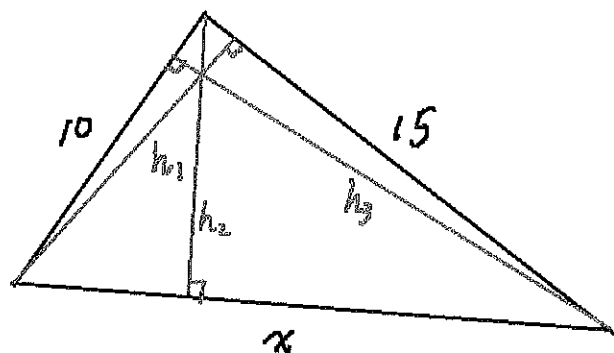
考点: 立体几何



解答: 如上图所示, 当从某个角落切掉边长为 1 的小正方体后, 边数增加了 9 条, 因此总共切掉了 8 个顶点, 边数比原来增加了 $9 \cdot 8 = 72$ 条, 而原来总边数为 12 条, 因此切掉后总边数为 $12 + 72 = 84$ 条, 选择 D.

第 15 题

考点: 平面几何



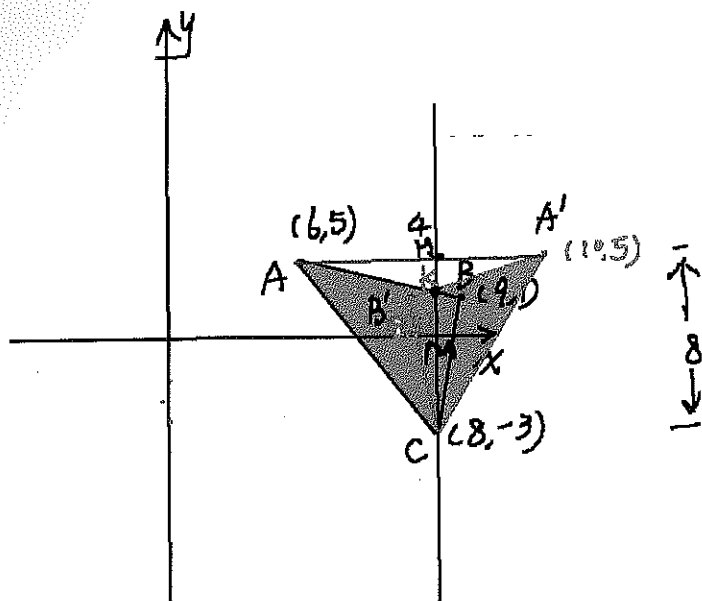
解答: 如上图, 假设第三条边长为 x , 由题意, $h_2 = \frac{h_1 + h_3}{2}$, 且 $xh_2 = 10h_3 = 15h_1$ 。

由第二个方程得, $h_2 = \frac{10h_3}{x}$, $h_1 = \frac{10h_3}{15} = \frac{2h_3}{3}$, 代入第一个方程得,

$$\frac{10h_3}{x} = \frac{\frac{2}{3}h_3 + h_3}{2} = \frac{5}{6}h_3, \text{ 即 } \frac{10h_3}{x} = \frac{5}{6}h_3, \text{ 两边约去 } h_3, x = 12, \text{ 选择 D.}$$

第 16 题

考点: 解析几何(直线方程)



解答: 如上图所示要求的面积为阴影部分的面积, 可以看成是 $\triangle AA'C$ 的面积减去 $\triangle AA'K$ 的面积。由此需要先求出 HK 的长度。

直线 AB 的斜率为 $m_{AB} = \frac{1-5}{9-6} = -\frac{4}{3}$, 则直线 AB 的方程为 $y-1 = -\frac{4}{3}(x-9)$, 令 $x=8$ 代入, 得, $y = \frac{7}{3}$, 所以 $MK = \frac{7}{3}$, 那么 $HK = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$ 。

阴影部分面积为 $S = S_{\triangle AA'C} - S_{\triangle AA'K} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{3} = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$, 选择 E。

第 17 题

考点: 数论 (倍数的个数)

解答: 1. 当天数是 3 和 4 的倍数, 但不是 5 的倍数时, 则那天只有 Alice 和 Beatrix

访问, Claire 没来。1-365 内同时是 3 和 4 的倍数, 即 12 的倍数的个数为: $\left\lfloor \frac{365}{12} \right\rfloor = 30$

天, 同时是 3、4 和 5 的倍数, 即 60 的倍数的个数为: $\left\lfloor \frac{365}{60} \right\rfloor = 6$ 天, 因此是 3

和 4 的倍数, 但不是 5 的倍数的个数为 $30-6=24$ 天。

2. 当天数是 3 和 5 的倍数, 但不是 4 的倍数时, 类似的可以得到总共

$$\left\lfloor \frac{365}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{365}{60} \right\rfloor = 24 - 6 = 18 \text{ 天}.$$

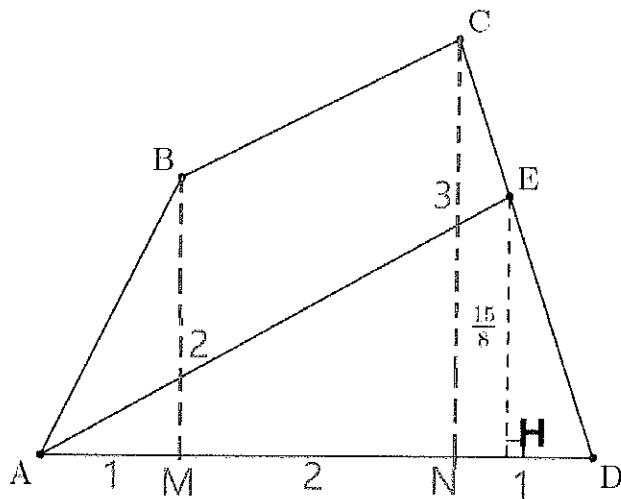
3. 当天数是 4 和 5 的倍数, 但不是 3 的倍数时, 总共有 $\left\lfloor \frac{365}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{365}{60} \right\rfloor = 18 - 6 = 12$

天。

综上, 总共 $24 + 18 + 12 = 54$ 天。选 B。

第 18 题

考点: 解析几何 (直线方程)



解答: 过 B 和 C 分别作 AD 的垂线 BM 和 CN, 则梯形 ABCD 的面积为

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABM} + S_{BMNC} + S_{\triangle DCN} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{(2+3) \cdot 2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{15}{2}, \text{ 因此}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{15}{4} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot EH, \text{ 那么 } EH = \frac{15}{8}. \text{ 因为 } \triangle EHD \sim \triangle CND, \text{ 所以 } \frac{EH}{CN} = \frac{DH}{DN}, \text{ 即}$$

$$\frac{\frac{15}{8}}{\frac{8}{3}} = \frac{DH}{1}, \text{ 解得, } DH = \frac{5}{8}, \text{ 因此 } AH = 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8}, \text{ 那么交点 } E\left(\frac{27}{8}, \frac{15}{8}\right),$$

$p+q+r+s=58$. 选 B.

第 19 题

考点：数论（因子个数定理，模运算，进制）

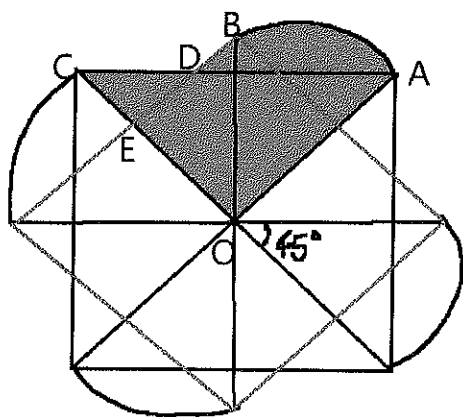
解答：因为 2013 的 b 进制以 3 结尾，则 $2013 \equiv 3 \pmod{b}$ ，且 $b > 3$ 。即

$2010 \equiv 0 \pmod{b}$ ，意味着 b 为 2010 的一个大于 3 的因子。因为 $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ ，根据因子个数定理，2010 一共有 16 个正因子，其中 1, 2, 3 均小于等于 3，因子大于 3 的因子有 13 个，选 C。

第 20 题

考点：平面几何

解答：



正方形内部区域扫过的面积是图中阴影部分面积的 4 倍。图中阴影部分的面积等于扇形 OAB、等腰直角 $\triangle BEC$ 和等腰直角 $\triangle CDE$ 面积之和。

扇形 OAB 面积为 $S_1 = \frac{1}{8}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$ 。因为 $BO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $EO = \frac{BO}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ，所

以 $S_{\triangle BEO} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ ，而因为 $CE = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ ，所以 $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}$ 。

那么正方形内部区域扫过的面积为 $S_{\triangle CED} = 4(S_1 + S_{\triangle BEO} + S_{\triangle CED}) = \frac{\pi}{4} + 2 - \sqrt{2}$, 选 C.

第 21 题

考点: 代数+数论(整除性)

解答: 假设第 12 个海盗得到 x 枚金币, 而这是第 11 个海盗拿走剩余的 $\frac{11}{12}$ 后剩下的, 因此第 11 个海盗拿走之前剩余 $x \cdot \frac{12}{1}$ 枚金币; 而这 $x \cdot \frac{12}{1}$ 枚金币是第 10 个海盗拿走剩余的 $\frac{10}{12}$ 后剩下的, 因此第 10 个海盗拿走金币前, 剩余 $x \cdot \frac{12}{1} \cdot \frac{12}{2}$ 枚金币; 而这 $x \cdot \frac{12}{1} \cdot \frac{12}{2}$ 枚金币是第 9 个海盗拿走剩余的 $\frac{9}{12}$ 后剩下的, 因此第 9 个海盗拿走前剩余 $x \cdot \frac{12}{1} \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{12}{3}$, 以此类推, 我们可以得到, 第 1 个海盗拿走前, 总共有

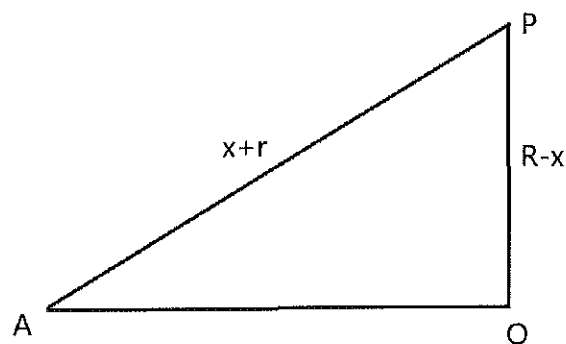
$$x \cdot \frac{12}{1} \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{12}{4} \cdots \frac{12}{11} = x \cdot 12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} \cdot 2 \cdot \frac{12}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{12}{11} = x \cdot 12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} \cdot 2 \cdot \frac{12}{7} \cdot 2 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{12}{11}$$

枚金币. 使得这个数是个正整数的最小 x 是 $x = 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11 = 1925$, 因此选 D.

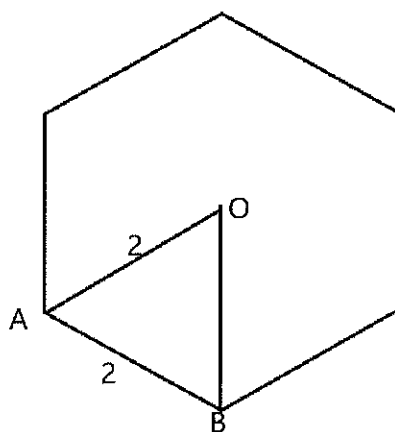
第 22 题

考点: 立体几何(选取合适的平面进行转化)

关键思路解析: 最后要求的是第 8 个球的半径. 这里我们选取的合适的切面是第 8 个球(半径为 x)的球心 P 和大球(半径为 R)球心 O 的连线(这条线必定过大球和第 8 球的切点)和第 8 球球心 P 和某个外切小球(半径为 $r=1$)球心 A 的连线(也必定过这个小球和第 8 球的切点)这 2 条连线所确定的平面如下图所示:



AO 长度即为正六边形的中心 O 到顶点的距离, 它等于正六边形的边长 2, $AO=2$.



下面我们还要求出 R, 就能利用勾股定理在直角 $\triangle AOP$ 中建立关于 x 的方程了.

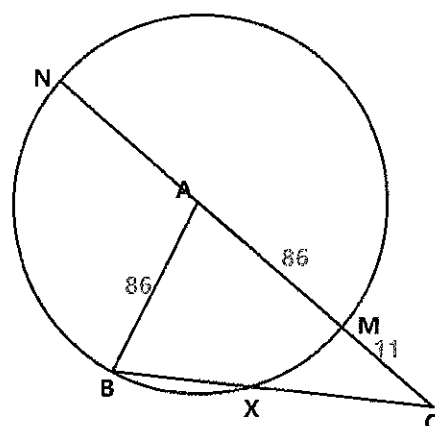
下面求出 R.

解答: 因为大球和小球相内切, 所以球心距 (即 AO 长度) 为半径之差: $2 = R - 1, R = 3$.

再在直角 $\triangle AOP$ 中用勾股定理, $(x+1)^2 = (3-x)^2 + 4, x = \frac{3}{2}$

Answer: B

第 23 题



考点: 平面几何(圆幂定理)

关键思路解析: BX 和 CX 恰好是截线 CB 截圆 A 所得的两条线段, 自然想到圆幂定理. 假设 $CX = x$, $CB = y$, 这里 x 和 y 均为整数. 所以 $xy = 11 \cdot 183 = 11 \cdot 3 \cdot 61$, 而在 $\triangle ABC$ 中, $11 < y < 183$, 且 $x < y$, 那么 $x = 33$, $y = 61$.

Answer: D

第 24 题

考点: 排列组合 (带重复的排列, 这在店里 AMC10/12 教材里都有讲解)

解答: 假设两所学校的 3 名选手分别是 A, B, C 和 D, E, F. 则每个回合都是 A, B, C 与 D, E, F 的比赛, 总共有下面 6 种可能性:

第一种	第二种	第三种	第四种	第五种	第六种
AD	AD	AE	AE	AF	AF
BE	BF	BD	BF	BD	BE
CF	CE	CF	CD	CE	CD

1. 若这 6 种可能性分别分配到 6 个回合里, 则符合题意, 一共有 $6! = 720$ 种方法。

2. 若其中一种可能性安排在了 2 个回合里, 则只有下面 2 种可能:

AD, BE, CF; AD, BE, CF; AE, BF, CD; AE, BF, CD; AF, BD, CE;

AF, BD, CE.

或者

AD, BF, CE; AD, BF, CE; AE, BD, CF; AE, BD, CF; AF, BE, CD;

AF, BE, CD.

对于每种可能性, 是个带有重复的排列, 需要安排到 6 个回合里。因此总共有

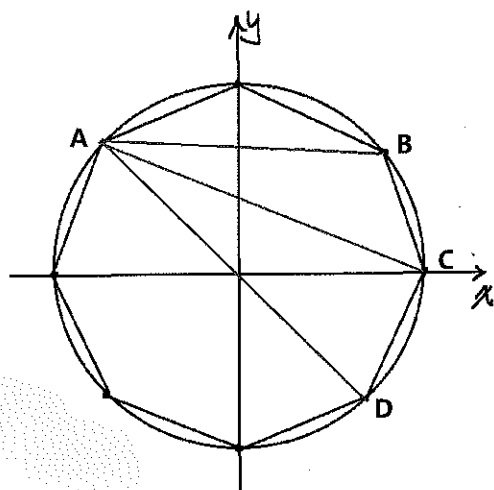
$$2 \cdot \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{720}{4} = 180 \text{ 种安排方法。}$$

综上, 总共有 $720 + 180 = 900$ 种安排方法。选择 E.

第 25 题

考点: 排列组合

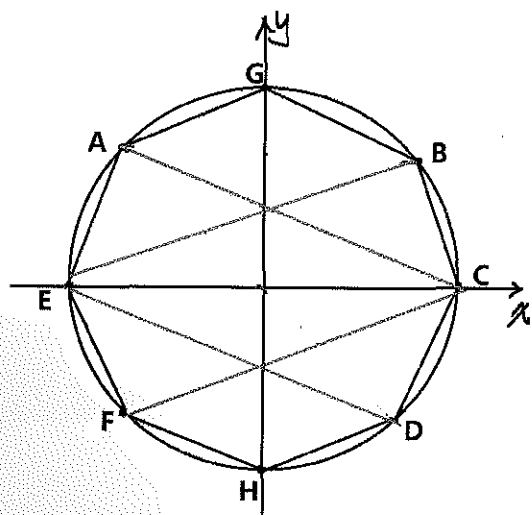
解答:



这些交点中,大多数是两根对角线的交点,但也存在某些交点是三条或者多条对角线共同的交点,因此我们先算出这所有对角线两两相交的交点,再扣除重复即可。

这 20 条对角线分 3 类:分别和 AB, AC, AD 长度相同的 3 类。对于对角线 AB,因为一侧有 1 个顶点,另一侧有 5 个顶点,因此有 $1 \times 5 = 5$ 条对角线穿过 AB,形成 5 个交点,而类似 AB 这样的对角线共 8 条,共形成 $8 \times 5 = 40$ 个交点;对于对角线 AC,因为一侧有 2 个顶点,另一侧有 4 个顶点,因此有 $2 \times 4 = 8$ 条对角线穿过 AC,形成 8 个交点,而像 AC 这样的对角线也共有 8 条,共形成 $8 \times 8 = 64$ 个交点;对于对角线 AD,两侧各有 3 个顶点,因此共有 $3 \times 3 = 9$ 条对角线穿过 AD,而像 AD 这样的对角线共 4 条,共形成 $9 \times 4 = 36$ 个交点。上述所有的交点实际上均被重复计算 1 次,因此实际上这些对角线两两相交共形成 $\frac{40+64+36}{2} = 70$ 个交点。

然而因为有 4 条对角线同时交于坐标原点 O,他们两两相交共有 $C_4^2 = 6$ 个交点,其中 5 个是重复计算,因此需要扣除 5 个。



如上图，我们看 GH 这条对角线，上下各有 2 个交点为 3 条对角线共同的交点，每个交点被重复算了 $C_3^2 - 1 = 2$ 次，因此对于 GH 这条对角线来说，这 2 个交点总共被重复算了 4 次。而像 GH 这样的对角线总共有 4 条，因此重复计算 16 次。

综上，重复计算的次数总共为 $5 + 15 = 21$ 次。

因此，这 20 条对角线总共交于 $70 - 21 = 49$ 个点，选择 A。