

2013 AMC 10 B 解答

第1题

考点: 算术

解答: $\frac{2+4+6}{1+3+5} - \frac{1+3+5}{2+4+6} = \frac{12}{9} - \frac{9}{12} = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$, 选择 C.

第2题

考点: 算术

解答: $15 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 600$, 答案选 A.

第3题

考点: 代数 (列方程解应用题)

解答: 设低温为 x 度, 则高温为 $x+16$ 度, 则 $\frac{x+x+16}{2} = 3$, 解得, $x = -5$. 选择 C.

第4题

考点: 等差数列

解答: 这相当于是个首项为 201, 公差为 -1 的等差数列, 第 n 个数是

$a_n = 201 + (n-1)(-1) = -n + 202 = 53$, 解得, $n = 202 - 53 = 149$. 选择 D.

第5题

考点: 代数

解答: $2a - ab = a(2 - b) \geq 5(2 - 5) = -15$, 选择 B.

第 6 题

考点: 简单算术

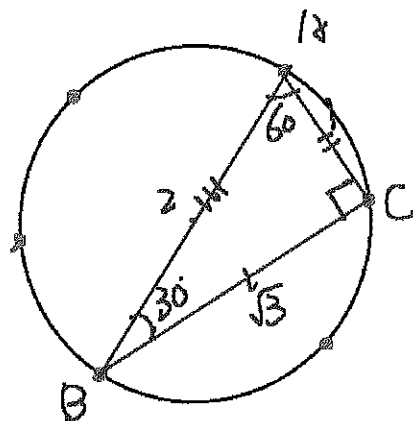
解答: 33 个学生的总年龄是 $33 \cdot 11$, 55 个父母的总年龄是 $33 \cdot 55$ 。那么这些学生和

父母的平均年龄是 $\frac{33 \cdot 11 + 33 \cdot 55}{88} = \frac{33 + 165}{8} = 24.75$ 。选择 C.

第 7 题

考点: 平面几何

解答:



如上图, $\triangle ABC$ 即为所要求的三边都不等的三角形。因为弧 AB 等于 180° , 因

此 $\angle C = 90^\circ$, AB 为直径, 长度为 2。而 $\angle B = 30^\circ$, 因此 $AC = 1$, $BC = \sqrt{3}$ 。所以

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{选择 B.}$$

第 8 题

考点：算术

解答：设 Ray 和 Tom 各自行驶了 x 英里数，因此他们总共行驶了 $2x$ 英里。而他们的耗油总量为 $\frac{x}{40} + \frac{x}{10} = \frac{x}{8}$ 加仑，因此平均每加仑行驶的英里数为 $2x \div \frac{x}{8} = 16$ ，选择 B.

第 9 题

考点：数论

解答： $27000 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 27 \cdot 8 \cdot 125$ ，因此这 3 个数是 27, 8 和 125，之和为 160. 选择 D.

第 10 题

考点：简单代数（列方程解应用题）

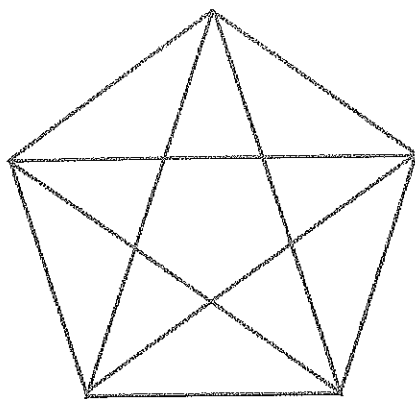
解答：设他们尝试了 x 次三分球，那么他们尝试了 $1.5x$ 次二分区。由题意， $1.5x \cdot 50\% \cdot 2 + x \cdot 40\% \cdot 3 = 54$ ，解得， $x=20$. 选 C

第 11 题

考点：代数变形

解答：方程变形为： $x^2 - 10x + y^2 + 6y + 34 = 0$ ， $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$ ，因此 $x=5, y=-3$ ， $x+y=2$. 选择 B.

第12题



考点：概率

解答：集合 S 中有 10 个元素，从中选择 2 个，有 $C_{10}^2 = 45$ 种方法。选择的 2 根线段长度相等，则只能从 5 条边或者 5 条对角线中选，共有 $2 \cdot C_5^2 = 20$ 种方法。因此概率为 $P = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$ 。选 B。

第13题

考点：等差数列

解答：我们先算出第 53 个数是第几次轮流说出的。第 1 次轮流说了 1 个数，第 2 次轮流一次说了 2 个数，第 3 次轮流一次说了 3 个数，...，第 n 次轮流一次说了 n 个数，那么前 n 次轮流总共说了 $s = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$ 。当 $n=9$ 时， $s=45 < 53$ ；但当 $n=10$ 时， $s=55 > 53$ ，所以第 53 个数是第 10 次轮流时说出的，这次说出的最后一个数（即第 55 个数）是 10，那么第 53 个数就是 8。选择 E。

第 14 题

考点: 代数化简

解答: 因为 $x \clubsuit y = y \clubsuit x$, 即 $x^2y - xy^2 = y^2x - yx^2$, $2x^2y - 2xy^2 = 0$, $xy(x - y) = 0$, 得, $x = 0$, 或 $y = 0$, 或 $x = y$, 这 3 条直线, 选择 E.

第 15 题

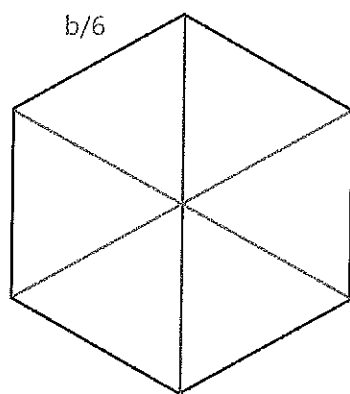
考点: 平面几何(正三角形的面积公式)

解答: 因为正三角形周长为 a , 则边长为 $\frac{a}{3}$, 那么它的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{36}$. 因

为正六边形的周长为 b , 则边长为 $\frac{b}{6}$. 正六边形的 3 条对角线将之分成 6 个边长均为 $\frac{b}{6}$ 的正三角形, 因此正六边形的面积可以看成其中一个正三角形面积的 6 倍,

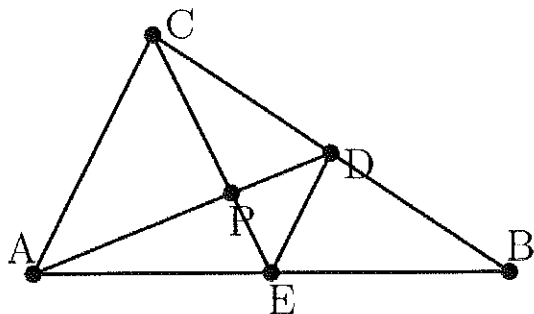
即 $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{b}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{24} b^2$. 因为两者面积相同, 因此 $\frac{\sqrt{3}a^2}{36} = \frac{\sqrt{3}b^2}{24}$, 得到, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

选 B.



第 16 题

考点: 平面几何(重心)



解答: 因为 AD 和 CE 均为中线, 因此 P 为重心。根据重心的性质, $CP:PE=2:1$,

$AP:PD=2:1$. 那么 $AP=2PD=4$, $CP=2PE=3$, 因此 $AD=6$, $CE=4.5$. 因为

$PE^2 + PD^2 = 1.5^2 + 2^2 = 2.5^2 = DE^2$, 所以 $AD \perp CE$, 那么四边形面积为

$$S_{ACDE} = \frac{1}{2} AD \times CE = \frac{1}{2} \times 6 \times 4.5 = 13.5, \text{ 选 B.}$$

第 17 题

考点: 代数

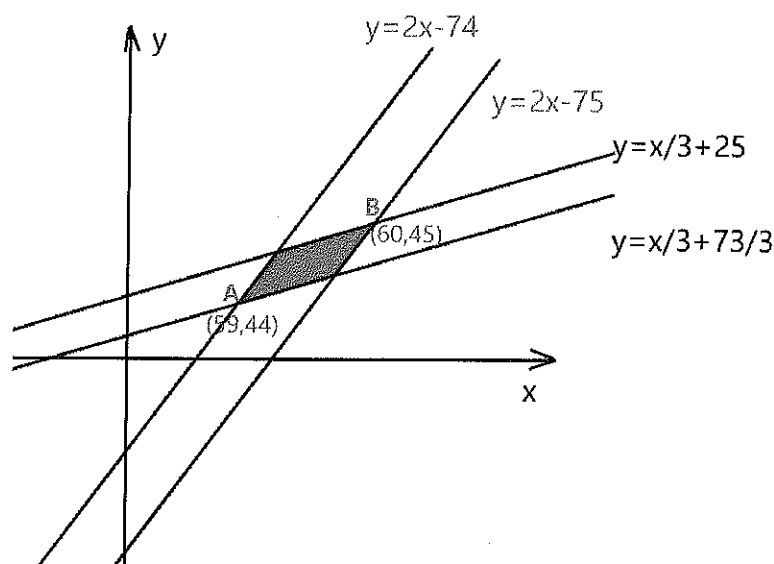
解答: 答案选 E

方法 1: 假设 Alex 去第一个报刊亭的次数为 x 次, 去第二个报刊亭的次数为 y

次, 因为最后手上的红色礼券至多 1 张, 蓝色礼券至多 2 张, 因此有下面的不等式:

$$\begin{cases} 0 \leq 75 - 2x + y \leq 1 \\ 0 \leq 75 + x - 3y \leq 2 \end{cases}$$

画出上述不等式区域如下:



因为 x 和 y 都只能是正整数, 从图中 $A(59, 44)$ 和 $B(60, 45)$ 的坐标可以看到, 只能是 $x=59, y=44$ 或者 $x=60, y=45$. 因为每次兑换多一张银色礼券, 所以总共换得的银色礼券数是 $x+y=103$ 或 105 . 观察选项答案, 只能选 E.

注意: 实际上可以排除 105. 因为 A 点对应的状态是红色礼券还剩 1 张, 蓝色礼券还剩 2 张; B 点对应的状态是红色和蓝色礼券均剩余 0 张. 在红色和蓝色礼券不断兑换过程中, 数目减少, 首先到达状态 A, 再也无法继续兑换到达 B 点了. B 点只是表示总价值和 105 张银色礼券相等.

方法 2:

我们约定记号 75R 表示 75 张红色, 75B 表示 75 张蓝色, 75S 表示 75 张银色.

Alex 第一次兑换 75 张红色, 结果为 37S, 37B, 1R; 再将 75 张蓝色兑换, 结果为 25S, 25R; 因此目前手上总共有 62S, 37B, 26R. 接着继续将 37 张蓝色兑换, 结果为 12S, 12R, 1B; 将 26 张红色兑换, 结果为 13S, 13B. 因此目前手上总共有 87S, 14B, 12R. 继续将 14 张蓝色兑换, 得 4S, 4R, 2B; 将 12 张红色兑换, 得 6S, 6B; 因此目前手上总共 97S, 8B, 4R. 继续将 8 个蓝色兑换, 得 2S, 2R, 2B; 将 4 个红色兑换, 得, 2S, 2B; 因此目前手上总共有 101S, 4B, 2R. 继续将 4 张蓝色兑换, 得, 1S, 1R, 1B; 将 2 张红色兑换, 得, 1S,

1B; 因此目前手上共有 103S, 1R, 2B。无法再继续兑换, 因此最后最多 103 张银色。选 E。

第 18 题

考点: 排列组合, 数列 (简单不定方程)

解答: 这里千位为 1 或 2, 我们分类讨论。

①若千位数字为 1, 设百位, 十位, 个位数字分别是 x, y, z , 那么 $z = x + y + 1$. 因为 $0 \leq z \leq 9$, 这决定了 x 和 y 的取值可能性, x 和 y 确定了, z 由 x, y 唯一确定。列出下表:

x 的取值	y 的取值
0	0~8, 共 9 个
1	0~7, 共 8 个
2	0~6, 共 7 个
3	0~5, 共 6 个
.....	
8	0, 共 1 个
9	y 无法取值, 共 0 个

因此总的情况数是 $1+2+3+\dots+8+9=45$.

②若千位为2, 则百位只能是0, 设十位和个位数字分别是 x 和 y , 则 $y = x + 2$ 。

因为 $0 \leq x \leq 1$, 因此只有2种情况: 若 $x=0, y=2$, 为2002; 若 $x=1, y=3$, 为2013. 但要求数小于2013, 不符题意. 因此只有1个, 为2002.

综上, 总共有 $45+1=46$ 个. 选D。

第19题

考点: 代数(等差数列, 一元二次方程的判别式)

解答: 因为实数 c, b, a 成等差数列, 所以 $a+c=2b$. 因为一元二次方程 $ax^2 + bx + c$

恰好只有1个根, 所以判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. 那么方程的根为 $x = -\frac{b}{2a}$. 问题

就变成了, 已知 $\begin{cases} a+c=2b \\ b^2-4ac=0 \end{cases}$, 求 $-\frac{b}{2a}$ 的值. 我们将方程消去 c . 由两个方程知道,

$c = 2b - a = \frac{b^2}{4a}$, 所以 $8ab - 4a^2 = b^2$, 两边除以 a^2 , 且令 $\frac{b}{a} = k$, 则 $k^2 - 8k + 4 = 0$,

解得, $k = 4 \pm 2\sqrt{3}$, 但 $k = \frac{b}{a} \leq 1$, 所以 $k = 4 - 2\sqrt{3}$, 那么方程的根为

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}k = -2 + \sqrt{3}$, 选D.

第20题

考点: 数论(质因数分解)

关键思路分析: 首先应该想到要把2013进行 prime factorization, 再看这些 prime numbers 如何凑成阶乘相乘除的形式.

解答: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, 若 $a_1 = 61, b_1 = 60$, 则2013可写成 $2013 = \frac{61! \cdot 11! \cdot 3!}{60! \cdot 10! \cdot 2!}$ 满足题意,

但是此时 $a_1 + b_1 = 121$ 不是最小. 再继续调小使得 $b_1 = 59$, 则

$2013 = 61 \cdot 11 \cdot 3 = \frac{61! \cdot 19! \cdot 11!}{59! \cdot 20! \cdot 10!}$. 再继续调小 $b_1 = 58$, 则 $2013 = \frac{61! \cdot \dots}{58! \cdot \dots}$, 此时分子留下

60·59,而59是质数,但是59不是2013的因子,所以必须被分母约掉,说明分母又要包含59!,而 $b_1!=58!$ 是分母中最大的阶乘,产生矛盾.所以 b_1 最小为59,那么此时 $|a_1-b_1|=|61-59|=2$.答案选B。

第21题

考点: 数列

解答: 设其中一个数列的第1项为A,第二项为C,则这个数列的前7项如下:

$$A, C, A+C, A+2C, 2A+3C, 3A+5C, 5A+8C.$$

设另一个数列的第1项为B,第二项为D,则类似上述数列,这个数列的第7项

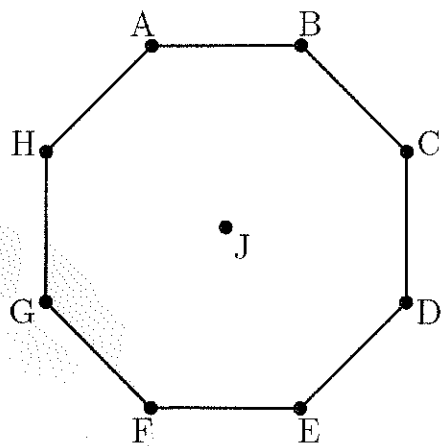
为 $5B+8D$. 因此 $N=5A+8C=5B+8D$, 得, $\frac{A-B}{D-C}=\frac{8}{5}$. 因为要求 $N=5A+8C$ 尽

可能小, 即A和C尽可能小地取值, 因此令 $A-B=8, D-C=5$. $A=8+B$, 而

$B \geq 0$, 所以A最小为8, 而因为 $C \geq A$, 所以C最小为8, 此时 $D=13$, 满足 $D \geq B$.

因此 $N=5A+8C=5 \cdot 8+8 \cdot 8=104$ 为N的最小值。选C。

第22题



考点: 排列组合

解答：因为这4个和都同时加了J，因此我们只需要满足

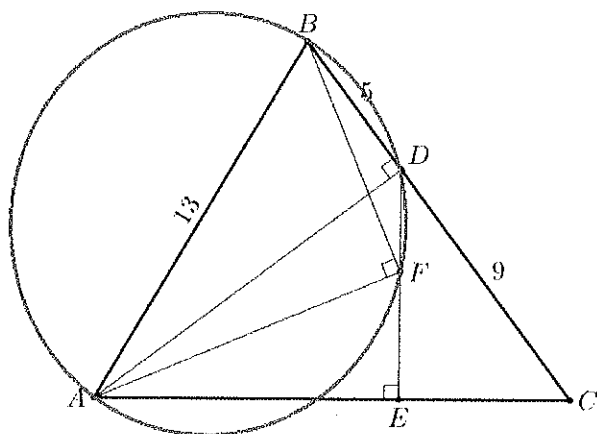
$A+E=B+F=C+G=D+H$ 即可。也即表示1~9的数字中，除了J之外，其余数字之和应为4的倍数。而 $1+2+3+\dots+9=45$ ，所以J只能为1,5,9，有3种方法。

对于每种方法，剩余的数字组成和相等的4对，只有1种方法。然后再把这4对数字分配给A和E，B和F，C和G，D和H，共4!种方法。而将每对的2个数字按照何种顺序分配给对角线的2个端点，都分别有2种方法，所以共有 2^4 种可能性。因此总的方法数是 $3 \cdot 4! \cdot 2^4 = 3 \cdot 24 \cdot 16 = 1152$ ，选C。

第23题

考点：平面几何（相似，海伦公式，托勒密定理等）

解答：



我们先利用海伦公式求AD的长度。 $\triangle ABC$ 的半周长为 $s=21$ ，所以

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-13)(s-14)(s-15)} = \sqrt{21(8)(7)(6)} = 84, \text{ 而 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = 7 \cdot AD,$$

所以 $AD=12$ ，因此由勾股定理， $BD=5$ ， $CD=9$ 。因为 $\angle AFB = \angle ADB = 90^\circ$ ，

所以点A,B,D,F四点共圆。那么 $\angle ABF = \angle ADE = \angle C$ ，所以

$$BF = BA \cdot \cos \angle ABF = 13 \cdot \cos \angle C = 13 \cdot \frac{9}{15} = 13 \cdot \frac{3}{5},$$

$AF = BA \cdot \sin \angle ABF = 13 \cdot \sin \angle C = 13 \cdot \frac{12}{15} = 13 \cdot \frac{4}{5}$ 。令 $x = DF$ 。由托勒密定理

(Ptolemy's theorem), 我们有

$$13x + \left(5 \cdot 13 \cdot \frac{4}{5}\right) = 12 \cdot 13 \cdot \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 13x + 52 = 93.6. \quad \text{两边除以13,}$$

得 $x + 4 = 7.2 \implies x = \frac{16}{5}$, 因此答案为: (B) 21.

第 24 题

考点: 数论(所有因子之和)(这个定理在 AMC10/12 教材里第一章有详细阐述)

解答: 因为 m 恰好有 4 个因子, 所以 m 因式分解后一定是这样的形式: $m = p_1 p_2$

或 $m = p^3$. 而 n 为 m 的所有因子之和, 所以根据所有因子之和定理有,

$n = (1 + p_1)(1 + p_2)$ 或 $n = 1 + p + p^2 + p^3$. 我们先排除后一种情况: 将 $p = 11$ 代入

$n = 1 + p + p^2 + p^3$ 得 $n = 1464 < 2010$, 而将 $p = 13$ 代入 $n = 1 + p + p^2 + p^3$ 得

$n = 2380 > 2019$, 因此 n 只能是 $n = (1 + p_1)(1 + p_2)$. 下面根据 p_1, p_2 中是否有一个是

2, 分类讨论。

①若 p_1, p_2 中有一个是 2, 则另一个质数是奇质数, 那么 n 就是 6 的倍数。集合

$\{2010, 2011, 2012, \dots, 2019\}$ 中能被 6 整除的数是 2010 和 2016. 对于 2010, 则

$2010 = (1 + 2)(1 + 669)$, 但 669 不是质数, 所以 2010 不是好数。对于 2016, 则

$2016 = (1 + 2)(1 + 671)$, 而 $11 \nmid 671$, 所以 671 不是质数, 因此这种情况下 2016 不

是好数。

②若 p_1, p_2 都是奇质数, 则 n 是 4 的倍数。集合 $\{2010, 2011, 2012, \dots, 2019\}$ 中能被 4

整除的数是 2012 和 2016. 因为 n 需要能写成 2 个偶数相乘的形式,

$2012 = 2 \cdot 1006 = (1+1)(1+1005)$, 但 1 和 1005 均不是质数, 因此 2012 不是好数。

$2016 = 4 \cdot 504 = (1+3)(1+503)$, 3 和 503 都是质数, 因此 2016 是个好数。

综上, 满足题意的好数只有 1 个, 是 2016. 选 A.

第 25 题

考点: 模运算规则(店内 AMC10/12 教材对此有丰富的讲解), 进制

解答: $N = a_n 5^n + a_{n-1} 5^{n-1} + \dots + a_1 5 + a = b_n 6^n + b_{n-1} 6^{n-1} + \dots + b_1 6 + b$

因为 5 进制的每一位 ≤ 4 , 6 进制的每一位 ≤ 5 , 因此它们相加不会产生进位。因此只需要使得 N 的 5 进制和 6 进制数个位和十位的和分别等于 10 进制数 $2N$ 的个位和十位即可。所以我们得到如下方程组:

$$\begin{cases} a = N(\bmod 5) \\ b = N(\bmod 6) \\ a + b = 2N(\bmod 10) \\ \frac{N-a}{5}(\bmod 5) + \frac{N-b}{6}(\bmod 6) = \frac{2N-(a+b)}{10}(\bmod 10) \end{cases}$$

其中第 4 个方程表示 N 的 5 进制的十位和 6 进制的十位相加等于 $2N$ 的 10 进制的十位。根据教材有关模运算的性质 6: 若 $a \equiv b(\bmod m)$, 那么 $ak \equiv bk(\bmod mk)$ 。

因为 $a \equiv N(\bmod 5)$, 所以 $2a \equiv 2N(\bmod 10)$, 而 $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq 2N(\bmod 10) \leq 9$, 因此 $2a = 2N(\bmod 10)$, 代入第 3 个方程, $a + b = 2a$, 因此 $b = a$, 因此原方程组化简为:

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq 4 \\ \frac{N-a}{5}(\bmod 5) + \frac{N-a}{6}(\bmod 6) = \frac{N-a}{5}(\bmod 10) \end{cases}$$

注意到, 若 $\frac{N-a}{5}(\bmod 10) \geq 5$, 则减 5 得到 $\frac{N-a}{5}(\bmod 5)$; 若 $\frac{N-a}{5}(\bmod 10)$ 的结果 < 5 , 则 $\frac{N-a}{5}(\bmod 10) = \frac{N-a}{5}(\bmod 5)$. 因此上面的方程组又分为下面 2 个方程组进行讨论.

第一种情况:

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq 4 \\ \frac{N-a}{5}(\bmod 10) \geq 5 \\ \frac{N-a}{6}(\bmod 6) = 5 \end{cases}$$

由第二个方程, $5 \mid (N-a)$, 有第三个方程, $6 \mid (N-a)$, 因此 $30 \mid (N-a)$, $N-a = 30k$

代入第三个方程, $5k(\bmod 6) = 5$, 因为 $(5, 6) = 1$, 所以 $k \equiv 1(\bmod 6)$, $k = 6m+1$, 那

么 $N = 30k + a = 30(6m+1) + a = 180m + 30 + a$, 因为 N 为 3 位正整数, 所以

$m = 1, 2, 3, 4, 5$, 再结合第二个方程, $\frac{N-a}{5}(\bmod 10) = 36m + 6(\bmod 10) \geq 5$, 因此

$m = 2, 5$. 此时 $N = 180m + 30 + a = 390 + a, 930 + a$. 有这 2 种可能的形式, 而每种形

式中, 因为 $0 \leq a \leq 4$ 有 5 种取值, 因此 N 总共有 10 种取值.

第二种情况:

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq 4 \\ \frac{N-a}{5}(\bmod 10) < 5 \\ \frac{N-a}{6}(\bmod 6) = 0 \end{cases}$$

由第二个方程, $5 \mid (N-a)$, 由第三个方程, $36 \mid (N-a)$, 所以 $180 \mid (N-a)$. 那么

$N-a = 180k, N = 180k + a$. 因为 N 是个三位数, 而要求

$\frac{N-a}{5}(\bmod 10) = 36k(\bmod 10) < 5$, 所以 $k = 2, 4, 5$, 此时, $N = 360 + a, 720 + a, 900 + a$

这 3 种形式, 而每种形式中 a 的值可取 0~4 共 5 种, 所以 N 总共 15 种取值。

综上, N 一共有 25 种取值。选 E。