

2014 AMC 10 B 解答

第1题

考点：算术

解答：若 Leah 多了一枚 5 分硬币，那么她就有 14 枚硬币。而因为她拥有的 5 分硬币和 1 分硬币数目一样，所以各为 7 枚。那么增加了 1 枚 5 分硬币后的结果。因此原来有 6 枚 5 分硬币和 7 枚 1 分硬币，总价值为 $6 \cdot 5 + 7 = \boxed{37(C)}$ 美分。

第2题

考点：算术

解答： $\frac{2^3 + 2^3}{2^{-3} + 2^{-3}} = \frac{8 + 8}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 16 \cdot 4 = 64$, 因此答案为 $\boxed{(E)}$ 。

第3题

考点：比例

解答：令总路程是 x 英里，则有 $\frac{x}{3} + 20 + \frac{x}{5} = x$ ，化简得， $\frac{8x}{15} + 20 = x$ ，
 $20 = \frac{7x}{15}$ ，解得， $x = 20 \times \frac{15}{7} = \frac{300}{7}$ ，选 E。

第4题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设香蕉是一元一根，一个玛芬是 x 元，那么 $2x + 16 = 2(4x + 3)$ ，解得，

$$x = \frac{5}{3}, \text{ 选 B.}$$

第 5 题

考点：平面几何

解答：设玻璃高为 $5x$ ，宽为 $2x$ ，由于窗户是个正方形，因此有

$$2x \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 5x \cdot 2 + 2 \cdot 3, \text{ 两边除以 } 2, 4x + 5 = 5x + 3, x = 2, \text{ 因此正方形窗户的}$$

边长为 $8x + 10 = 26$ 英寸，选 A。

第 6 题

考点：分数

解答：假设气球原价为 x 元。现在每 2 只只需要 $x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}x$ 元，因此 $30x$ 元可以

$$\frac{30x}{\frac{5x}{3}} \times 2 = 36$$

买 3 只，选 C。

第 7 题

考点：百分数

解答：A 比 B 大 $x\%$ ，因此 $A = \frac{100 + x}{100}(B)$ 。解出 x ，我们有，

$$\frac{A}{B} = \frac{100 + x}{100}$$

$$100 \frac{A}{B} = 100 + x$$

$$100 \left(\frac{A}{B} - 1 \right) = x$$

$$100 \left(\frac{A-B}{B} \right) = x \quad \boxed{(A)}$$

第8题

考点：行程问题

解答：这辆卡车每秒钟行驶 $\frac{b}{18t}$ 码，而3分钟是180秒，所以3分钟内行驶了

$$\frac{b}{18t} \cdot 180 = \frac{10b}{t} \text{ 码，选 E。}$$

第9题

考点：算术

解答：原式 $\frac{\frac{1}{w} + \frac{1}{z}}{\frac{1}{w} - \frac{1}{z}} = 2014$ 左边上下同乘以 wz ，得到 $\frac{z+w}{z-w} = 2014$ 。从而

$$\frac{w+z}{w-z} = -2014$$

第10题

考点：算术，逻辑推理

解答：最高位相加为D，最低位相加也为D，表明次高位相加没有进位，即 $B+C=B$ ，

$C=0$ 。因此只需满足 $A+B=D$ ， $A \neq 0$ ， $B \neq 0$ ， $A \neq B$ 。因此D最少是3，最大为9，

可以取7个值，选C。

第 11 题

考点：代数（不等式）

解答：设原价为 x ，对于方案 1，降价后的价格为 $(1 - .15)(1 - .15)x = .7225x$ ，对于方案 2，降价后的价格为 $(1 - .1)(1 - .1)(1 - .1)x = .729x$ 。最后，对于方案 3，降价后的价格为 $(1 - .25)(1 - .05) = .7125x$ 。因此， $x \cdot n\%$ 必须大于 $\max(x - .7225x, x - .729x, x - .7125x)$ ，即 $x \cdot n\% > 0.2875x$ ，解得， $n > 28.75$ ，则 n 的最小正整数值为 29。选 **(C) 29**。

第 12 题

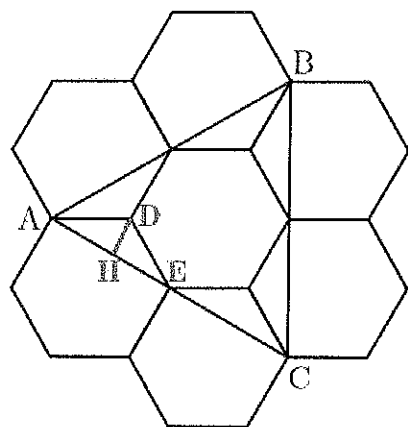
考点：数论（因子）

解答：和第五大因子相乘结果为 2,014,000,000 的是第五小因子。而 2,014,000,000 的因子从最小到大依次为：1, 2, 4, 5, 8... 因此第五小因子是 8，那么它的第五大因子为 $\frac{2,014,000,000}{8} = 251750000$ ，选 C。

第 13 题

考点：平面几何（特殊直角三角形）

解答：



在等腰 $\triangle ADE$ 中,过D作 $DH \perp AE$ 于H,直角 $\triangle DHE$ 中, $\angle DEH = 30^\circ$, $DE = 1$,

所以 $HE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么 $AC = 4 \times HE = 2\sqrt{3}$, 此为等边三角形ABC的边长。所以

$\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 = 3\sqrt{3}$ 。

第 14 题

考点: 数论 (不定方程)

解答: 设 Danica 行驶了 x 小时, 则有 $100c + 10b + a - (100a + 10b + c) = 55x$, 化简得, $99c - 99a = 55x$, $9(c - a) = 5x$, 表明 $c - a$ 为 5 的倍数, 而 c, a 均为 0~9 的数字, 所以 $c - a = 5$, 那么 $(c, a) = (6, 1), (7, 2), (8, 3), (9, 4)$, 但是因为 $a + b + c \leq 7$, 所以只能是 $(c, a) = (6, 1)$, 此时 $a + b + c \leq 7$ 变成 $7 + b \leq 7$, $b \leq 0$, 则 $b = 0$ 。所以 $a^2 + b^2 + c^2 = 37$, 选 D。

第 15 题

考点: 平面几何 (特殊直角三角形)

解答: 设 $CB = 1$, 所以 $AB = 2$ 。在直角 $\triangle ADF$ 中, 因为 $\angle ADF = 60^\circ$, 所以 $AF = \sqrt{3}$ 。

在直角 $\triangle ADE$ 中, $\angle ADE = 30^\circ$, 所以 $DE = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $EF = DE = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 因此

$$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} EF \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 而矩形面积为 } 2, \text{ 所以比值为 } \boxed{(A) \frac{\sqrt{3}}{6}}.$$

第 16 题

考点: 概率 (分类讨论)

解答: 我们对数字相同的骰子数分类讨论:

①有 4 个骰子数字都相同。这个相同的数字有 6 种。而每个骰子原本均有 6 种可能性, 因此概率为 $\frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}$

②有 3 个骰子数字都相同。首先确定相同数字的 3 个骰子, 有 $C_4^3 = 4$ 种方法。这 3 个骰子数字相同的概率是 $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$, 第 4 个骰子数字不同的概率是 $\frac{5}{6}$ 。因此这种情况下的概率为 $4 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{20}{216}$ 。

综上, 总的概率为 $\frac{21}{216} = \frac{7}{72}$, 选 B。

第 17 题

考点: 数论 (模运算)

解答: $10^{1002} - 4^{501} = 2^{1002} \cdot 5^{1002} - 2^{1002}$, 我们提出公因子 2^{1002} , 剩下

$5^{1002} - 1$ 。将这个数称为 N 。若 k 是能整除 N 的 2 的最大的幂, 那么答案就是

2^{1002+k} 。下面我们考虑 $N \pmod{16}$, 因为通过观察选项, $k \leq 4$ 。由欧拉定

理, $5^{\varphi(16)} = 5^8 \equiv 1 \pmod{16}$, 所以 $5^{1000} \equiv 1 \pmod{16}$, 则 $N = 5^{1002} - 1 \equiv 5^2 - 1 \equiv 8 \pmod{16}$,

这表明 N 不能被 16 整除, 但能被 8 整除, 因此能整除 N 的 2 的最大幂是 2^3 , 那么能整除 $10^{1002} - 4^{501}$ 的 2 的最大幂是 $2^{1002+3} = 2^{1005}$, 选 D。

第 18 题

考点: 数据分析 (平均数, 中位数, 众数)

解答: 将这 11 个数从小到大排列, 则第 6 个数是 9. 因为 11 个数总和是 110 不变, 则要使得最大的数尽可能大, 则要使得其他数尽可能小。因为唯一的众数是 8, 则有 2 个 8 或者 3 个 8. 下面分 2 种情况。

①若是 2 个 8, 则第 4 和第 5 个数均是 8, 前 3 个数尽可能小, 为 1, 2, 3; 第 7, 8, 9, 10 个数分别为 10, 11, 12, 13, 那么此时最大的数最大为

$$110 - (1 + 2 + 3 + 8 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13) = 33。$$

②若是 3 个 8, 则第 3 到第 5 个数均是 8, 第 1 和第 2 个数是两个 1. 第 7 个数是 9, 第 8 和第 9 个数均是 10, 第 10 个数是 11, 因此此时最大的数最大为

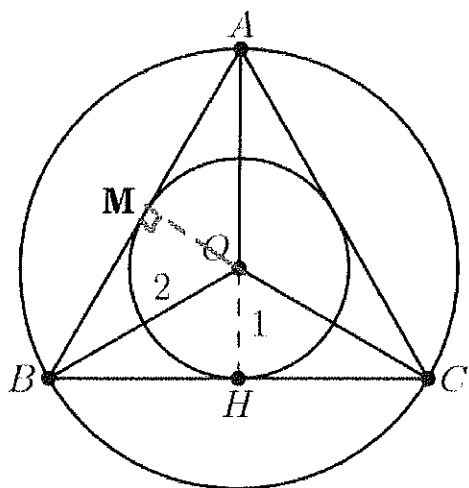
$$110 - (1 + 1 + 8 + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 + 10 + 11) = 35。$$

选项中最大也为 35, 选 E。

第 19 题

考点: 概率 (几何概型)

解答:



首先在外圆上任意选一点 A。再过 A 作内圆的两条切线交外圆于 B 和 C 两点。

则第二个点应该选在劣弧 BC 上，才能保证两点连线和内圆相交。连接 OM。在

直角 $\triangle AOM$ 中， $MO = \frac{1}{2}AO$ ，所以 $\angle AOM = 60^\circ$ ，那么 $\angle AOB = 120^\circ$ ，同理，

$\angle AOC = 120^\circ$ ，则 $\angle BOC = 120^\circ$ ，因此 2 个点的连线和内圆相交的概率是

$$\frac{120}{360} = \boxed{(D) \frac{1}{3}}$$

第 20 题

考点：代数(解不等式)

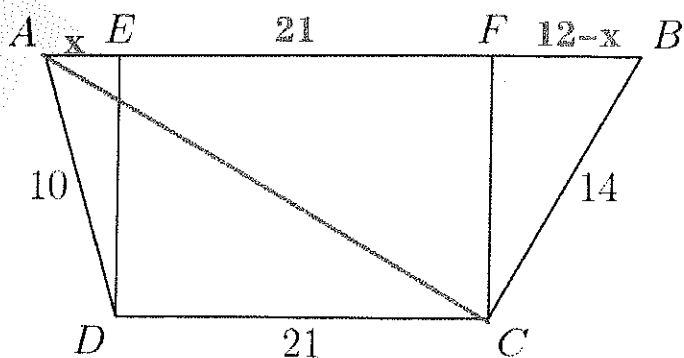
解答：因为 $x^4 - 51x^2 + 50 = (x^2 - 50)(x^2 - 1) < 0$ ，所以 $1 < x^2 < 50$ ，所以整数 x 需满

足 $2 \leq x \leq 7$ 或 $-7 \leq x \leq -2$ ，共 12 个，选 C。

第 21 题

考点：平面几何

解答：

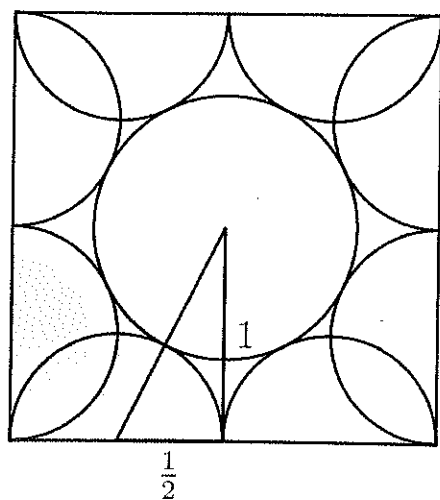


过 D 和 C 分别作 AB 的垂线，垂足分别为 E 和 F。则 $EF = CD = 21$ 。设 $AE = x$ ，则 $BF = 12 - x$ 。由于 $AD^2 - AE^2 = DE^2 = CF^2 = BC^2 - BF^2$ ，所以 $10^2 - x^2 = 14^2 - (12 - x)^2$ ，解得， $x = 2$ 。那么 $DE^2 = CF^2 = 100 - 4 = 96$ 。由于在直角 $\triangle ACF$ 和直角 $\triangle BED$ 中， $DE = CF$ ，但 $AF = 2 + 21 = 23 < BE = 31$ ，所以对角线 AC 较短。在直角三角形 ACF 中，由勾股定理， $AC = \sqrt{23^2 + 96} = 25$ ，选 B。

第 22 题

考点：平面几何（圆相切，勾股定理）

解答：



如上图，连接中间圆的圆心和其中一个半圆的圆心，再过中间圆的圆心向半圆直径所在边作垂线。在所形成的直角三角形中，运用勾股定理，

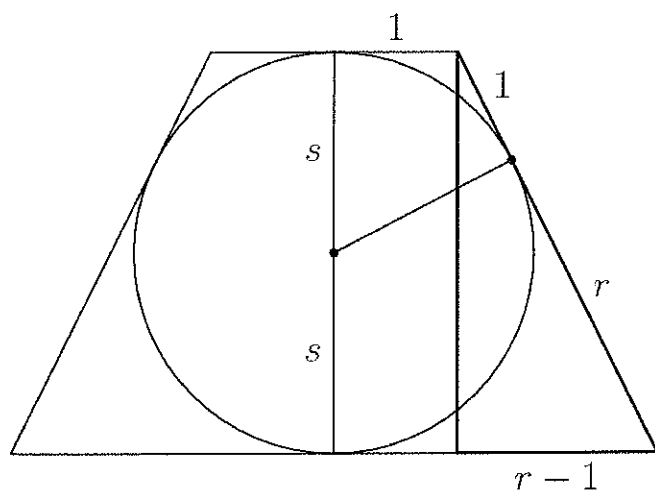
$$\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \text{此为两圆连心线的长度，为两圆半径之和，即}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + r, \text{ 所以中间圆的半径是 } r = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}, \text{ 选 } \boxed{(B) \frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

第 23 题

考点：立体几何

解答：



首先，我们画出通过球心的立体图形的垂直切面，如上图所示。令上底的直径为

2，下底的直径为 $2r$ 。在图示直径三角形中，由勾股定理，

$$(r+1)^2 = (2s)^2 + (r-1)^2, \text{ 展开得, } r^2 + 2r + 1 = 4s^2 + r^2 - 2r + 1,$$

从方程两边减去 $r^2 - 2r + 1$ ，得， $4r = 4s^2$ ，则 $s = \sqrt{r}$ 。接下来求圆锥台（被

切掉顶点的圆锥体）的体积和球的体积。因为我们知道，圆锥台的体积是球的体

积的 2 倍, 即 $V_{\text{frustum}} = 2V_{\text{sphere}}$, 且圆锥台的体积公式为

$$V_{\text{frustum}} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \quad (\text{这个公式可由大圆锥体积减去顶部小圆锥体积}$$

得到), 所以题中圆锥台的体积为 $V_{\text{frustum}} = \frac{\pi \cdot 2\sqrt{r}}{3}(r^2 + r + 1)$, 以及球的

体积为 $V_{\text{sphere}} = \frac{4(\sqrt{r})^3\pi}{3}$ 。因此我们有 $\frac{\pi \cdot 2\sqrt{r}}{3}(r^2 + r + 1) = 2 \cdot \frac{4(\sqrt{r})^3\pi}{3}$ 。

两边除以 $\frac{2\pi\sqrt{r}}{3}$, 得到, $r^2 + r + 1 = 4r$, 即 $r^2 - 3r + 1 = 0$ 。解得

$$r = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow \boxed{(E)}$$

第 24 题

考点: 排列组合 (圆排列)

解析: 首先分析出来, $n=1,2,3,4,5$ 时, 对于所有的圆排列, 都能找到这样的子集 (subset), 因为 $1+2+3+4+5=15$, 所以对应 $n=14,13,12,11,10$ 时对这 5 个数字的任何圆排列都是正确的. 我们只需要考察哪些对于 $n=6,7$ 不成立就行了. 因为沿着圆旋转或者对称后如果一样的话, 就认为一样, 那么不一样的圆排列只有 $\frac{4!}{2}=12$ 个. 我们只需要把这 12 个不同的圆排列全部列出来, 去找哪些符合题目要求就行了.

解答:

这 12 种不同的圆排列是 (注意各数字首尾相接):

12345	13425
12354	13524
12435	13245(找不到 $n=7$)
12453	13254
12534(找不到 $n=6$)	14325

12543

14235

所以找不到 $n=6$ 和 $n=7$ 的有 2 个, 选 B。

第 25 题

考点: 概率 (递推方法)

关键思路解析: 这里很明确的给出了递推的关系, 所以我们用递推做是最合理的。

因为叶片 5 的左右两边的叶片概率是对称的, 所以从叶片 5 跳到叶片 10 的概率为 $1/2$ 。再由递推关系式, 依次列出概率递推式, 算出从叶片 1 到叶片 10 的概率即可。

解答: 假设从叶片 N 跳到叶片 10 的概率为 $P(N)$, 则 $P(5) = \frac{1}{2}$ 。

那么题目递推关系:

$$P(4) = \frac{4}{10}P(3) + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$P(3) = \frac{3}{10}P(2) + \frac{7}{10} \cdot P(4) \quad (2)$$

$$P(2) = \frac{2}{10}P(1) + \frac{8}{10} \cdot P(3) \quad (3)$$

$$P(1) = \frac{9}{10}P(2) \quad (4)$$

下面解这个方程组, 把(1)代入(2), 得, $P(3) = \frac{5}{12}P(2) + \frac{7}{24}$

上式代入(3)式, 得到, $\frac{2}{3}P(2) = \frac{1}{5}P(1) + \frac{7}{30}$

(4)式解出 $P(2)$ 代入上式, 得到关于 $P(1)$ 的方程, $P(1) = \frac{63}{146}$

Answer: C