

2015 AMC 10 A 解答

第1题

考点：算术

解答：

$$(2^0 - 1 + 5^2 - 0)^{-1} \times 5 = (1 - 1 + 25 - 0)^{-1} \times 5 = 25^{-1} \times 5 = \frac{1}{25} \times 5 = \boxed{(C) \frac{1}{5}}$$

第2题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：设正方形瓷砖有 x 块，那么三角形瓷砖有 $25-x$ 块。则 $3(25-x)+4x=84$ ，

解得， $x=9$ ，选 $\boxed{(D) 9}$ 。

第3题

考点：数列

解答：找规律。做成1阶楼梯需要4根牙签，做成2阶楼梯需要再添加6根，做成3阶楼梯需要再添加8根，以此类推，做成4阶楼梯需要再添加10根，做成5阶楼梯需要再添加12根。因此在图中3阶楼梯的基础上，做成5阶楼梯需要添加 $10+12=22$ 根牙签，选D。

第4题

考点：比例

解答：设 Mia 有 m 个蛋。那么 Sofia 有 $2m$ 个蛋，Pablo 有 $6m$ 个蛋，均分后，他

们每个人有 $\frac{m + 2m + 6m}{3} = 3m$ 个蛋，因此 Pablo 需要给 Sofia 蛋的个数是 m

个，占了他总数的 $\frac{m}{6m} = \boxed{\text{(B)} \frac{1}{6}}$

第 5 题

考点：数据分析（平均数）

解答：其他 14 个学生的平均分为 80，那么他们的总分为 $14 \cdot 80 = 1120$ 。当加

上 Payton 的分数后，这 15 人的总分为 $15 \cdot 81 = 1215$ ，那么 Payton 的分数是

$1215 - 1120 = \boxed{\text{(E)} 95}$

第 6 题

考点：代数

解答：令 a 为较大的数， b 为较小的数，所以 $a + b = 5(a - b)$ ，化简得， $4a = 6b$ 。

因此 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ ，选 $\boxed{\text{(B)} \frac{3}{2}}$ 。

第 7 题

考点：等差数列

解答：等差数列的第 n 项为：

$a + (n - 1)d \implies 13 + (n - 1)3 = 73, \implies n = 21 \boxed{\text{(B)} 21}$

第 8 题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：根据这个问题可以列出一个方程组。令 p 为 Pete 今年的年龄， c 为 Claire 今年的年龄。

根据第一个条件有， $p - 2 = 3(c - 2)$ 。根据第二个条件有： $p - 4 = 4(c - 4)$ 。

解上述方程组。由第一个方程， $p = 3c - 4$ ，由第二个方程， $p = 4c - 12$ ，因此 $3c - 4 = 4c - 12$ ，解得， $c = 8$ ，那么 $p = 20$ 。

假设 x 年后 Pete 的年龄是 Claire 的 2 倍，那么 $20 + x = 2(8 + x)$ ，解得， $x = 4$ ，答案选 B。

第 9 题

考点：立体几何（圆柱体积）

解答：设第一个圆柱的半径为 r_1 ，第二个圆柱的半径是 r_2 。第一个圆柱的高为 h_1 ，

第二个圆柱的高为 h_2 ，根据题意， $r_2 = \frac{11r_1}{10}$ 以及 $\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$ 。将第一个方程代入第二个方程，并且两边除以 π ，我们有

$$r_1^2 h_1 = \frac{121r_1^2}{100} h_2 \implies h_1 = \frac{121h_2}{100} \text{ 因此选 D.}$$

第 10 题

考点：排列组合（分类讨论）

解答：a 只能和 c 或 d 相邻，因此下面分类讨论。

①若 a 和 c 相邻, 则 ac 或 ca , 则此时 d 和 b 只能分别这样安排: $bdac$, 以及 $cadb$

②若 a 和 d 相邻, 则 ad 或 da , 则此时 b 和 c 只能分别这样安排: $cadb$, 以及 $bdac$.

综上, 共 $bdac$, $cadb$, $cadb$, 以及 $bdac$ 这四种, 但其中两种重复, 因此不同的排列只有 2 种, 选 C。

第 11 题

考点: 平面几何

解答: 设长宽分别是 $4m, 3m$, 由勾股定理, 对角线长度为 $5m$ 。所以 $d = 5m$, $m = \frac{d}{5}$ 。

那么长和宽分别为 $\frac{4d}{5}, \frac{3d}{5}$, 面积 $\frac{4d}{5} \times \frac{3d}{5} = kd^2$, 解得, $k = \frac{12}{25}$, 选 C。

第 12 题

考点: 代数 (函数)

解答: 因为点 $(\sqrt{\pi}, a)$ 和 $(\sqrt{\pi}, b)$ 在方程 $y^2 + x^4 = 2x^2y + 1$ 的图像上, 所以将 $x = \sqrt{\pi}$

代入, 尝试解出 a 和 b :

$$y^2 + \sqrt{\pi}^4 = 2\sqrt{\pi}^2 y + 1$$

$$y^2 + \pi^2 = 2\pi y + 1$$

$$y^2 - 2\pi y + \pi^2 = 1$$

$$(y - \pi)^2 = 1$$

$$y - \pi = \pm 1$$

$$y = \pi + 1$$

$$y = \pi - 1$$

因此 $\pi+1$ 和 $\pi-1$ 中, 其中之一是 a , 另一个是 b , 那么 $|a-b|$ 为

$$|(\pi+1) - (\pi-1)| = 2, \text{ 选 } \boxed{(C) 2}。$$

第 13 题

考点：数论（倍数）

解答：假设有 x 枚 10 分硬币，则那么能得到的最大面值为 $5(12-x)+10x=5x+60$ ，而最小的面值是 5，因此所有能形成的面值组成一个首项为 5，末项为 $5x+60$ ，公差为 5 的等差数列。因为一共 17 项，所以 $\frac{5x+60}{5}=17$ ， $x=5$ 。可以验证，当有 7 枚 5 分硬币，5 枚 10 分硬币，能形成 5 分到 85 分之间公差为 5 的所有面值，且正好是 17 种面值，因此选 C。

第 14 题

考点：平面几何

解答：注意到这里圆盘在转的过程中它不仅“自转”，它还绕着钟面的中心“公转”，两种转动效果的叠加才是箭头转过的角度。因此假设圆盘转到 x 点箭头再次竖直向上。此过程中，令自转使得箭头转过的角度为 α （弧度）。因为圆盘转过的距离和在钟面滑过的距离相等，那么 $\alpha \cdot 10 = \frac{\pi}{6}x \cdot 20$ ，解得， $\alpha = \frac{\pi}{3}x$ ；公转使得箭头转过的角度为 β （弧度），那么 $\beta = \frac{\pi}{6}x$ 。而箭头总共转过 2π ，所以 $\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}x = 2\pi$ ，解得， $x=4$ 。因此是 4 点时箭头又竖直向上，选 C。

第 15 题

考点：数论（不定方程）

解答：由题意得到方程 $\frac{x+1}{y+1} = \frac{11x}{10y}$ 。交叉相乘并化简得， $xy+11x-10y=0$ ，分解因式为 $(x-10)(y+11)=-110$ 。因为 x 和 y 均为正整数，

则 $x - 10 > -10$ 且 $y + 11 > 11$ 。而 110 的因子共有 8 个，它们是

1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110。而其中大于 11 的因子有 3 个：22, 55, 110，因此 $\begin{cases} x - 10 = -5 \\ y + 11 = 22 \end{cases}$

或 $\begin{cases} x - 10 = -2 \\ y + 11 = 55 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 10 = -1 \\ y + 11 = 110 \end{cases}$ ，分别解得， $\begin{cases} x = 5 \\ y = 11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 8 \\ y = 44 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 9 \\ y = 99 \end{cases}$ ，但因为

x 和 y 互质，所以只有一组 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 11 \end{cases}$ 符合要求，因此答案选 **(B) 1**。

第 16 题

考点：代数（解方程，整体代入）

解答：将 2 个方程相加得，

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = x + y + 8, \text{化简得, } x^2 + y^2 = 5(x + y).$$

将原来 2 个方程相减得，

$$x^2 - y^2 - 4x + 4y = y - x. \text{移项并化简,}$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 3x - 3y = 3(x - y).$$

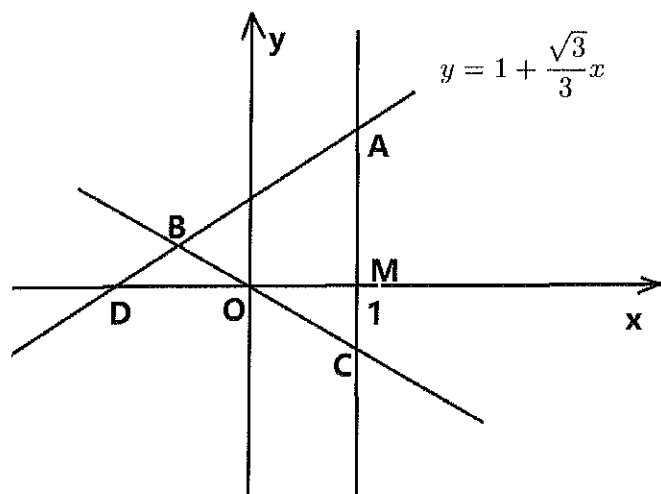
因为 $x \neq y$ ，所以上述方程两边除以 $x - y$ 得到，

$$x + y = 3. \text{将此代入 } x^2 + y^2 = 5(x + y), \text{得到,}$$

$$x^2 + y^2 = 5(x + y) = 5(3) = \boxed{\text{(B) 15}}.$$

第 17 题

考点：解析几何（直线）



解答:要求等边三角形 ABC 的周长, 只需要求边长即可. 因为容易求得,

$DM = 1 + \sqrt{3}$. 在直角 $\triangle ADM$ 中, 因为 $\angle ADM = 30^\circ$, 所以

$AM = \frac{DM}{\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为在直角三角形 OMC 中, $\angle MCO = 60^\circ$, 且 $OM = 1$,

所以 $CM = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 因此 $AC = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 周长为: $3 + 2\sqrt{3}$. 选 D.

第 18 题

考点: 数论 (进制) + 排列组合

关键思路解析: 先确定小于 1000 的 16 进制数最多是几位的. 因为要求的是只有 0-9 组成的这样的 16 进制数有多少个, 这就变成一个排列组合问题, 只要看每个位上 0-9 的可能性有多少种 (注意要保证整个数小于 1000), 然后运用乘法原理 (Multiplication Rule) 就可以了.

解答: 1000 用 16 进制表示只需要 3 位就可以. 所以下面我们对满足题意的整数 N 的位数个数进行分类讨论:

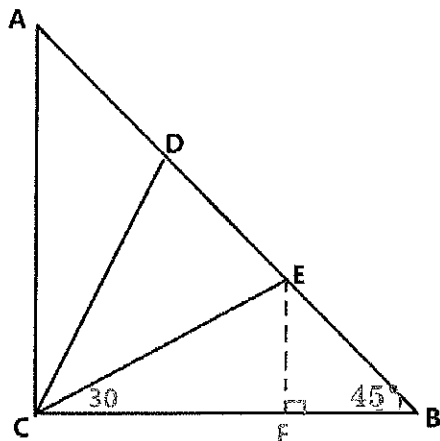
1. 如果是 N 是 1 位数, 那么可取 1-9 这 9 种可能性.
2. 如果 N 是 2 位数, 那么最低位可以取 0-9, 最高位可取 1-9, 总共 90 种可能性.

3. 如果 N 是 3 位数,那么最高位 1-3, 后面两位随意取数字, 都小于 1000, 总共有 300 种可能性;如果最高位为 4, 已经超过 1000.

所以一共有 $9+90+300=399$ 种可能性. $3+9+9=21$, 选 E。

第 19 题

考点: 平面几何 (30-60-90 直角三角形)



解答:根据条件:等腰直角三角形 ACB 面积为 12.5,可以得到

$AC = BC = 5, AB = 5\sqrt{2}$. 要求 $\triangle CDE$ 的面积, 而已知 $\triangle ACB$ 的面积, 且它们的高

一样, 均为 C 到 AB 的距离, 则 $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{DE}{AB}$, 即 $\frac{S_{\triangle CDE}}{12.5} = \frac{DE}{5\sqrt{2}}$, 所以接下来只需

要求解 DE 的长度即可. 首先求 BE 长度. 因 $\angle ECB = 30^\circ, \angle B = 45^\circ$, 这 2 个角是特

殊角, 得把它们放入直角三角形中, 所以过 E 作 $EF \perp BC$. 设

$EF = x, CF = \sqrt{3}x, FB = x$, 则 $CB = \sqrt{3}x + x = 5, x = \frac{5}{\sqrt{3}+1} = \frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$. 那么

$BE = \sqrt{2}x = \frac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{2}$; 而 $\triangle ADC \cong \triangle BEC$, 所以 $AD = BE = \frac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{2}$, 所以

$DE = 5\sqrt{2} - (5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} - 5\sqrt{6}$, 那么

$$S_{\triangle CDE} = \frac{12.5 \times DE}{5\sqrt{2}} = \frac{25}{2} \cdot \frac{10\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \frac{50 - 25\sqrt{3}}{2}$$

Answer : D

第 20 题

考点：数论（不定方程）

解答：假设此长方形的长宽分别为 a 和 b 。那么它的面积和周长分别是 ab 和

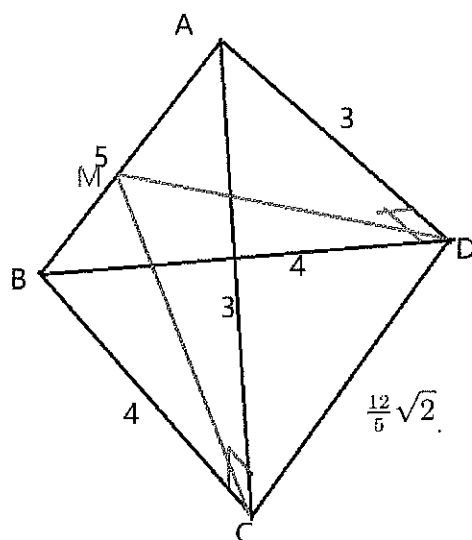
$2a + 2b$ 。因此 $A + P = ab + 2a + 2b$ 。分解因式得到， $A + P = (a + 2)(b + 2) - 4$ 。

选项中唯一不可以写成这种形式的是 102，因为 $102 + 4 = 106 = 2 \times 53$ ，此时 a 和 b 必

有一个为 0，不符题意。因此答案为 **B**。

第 21 题

考点：立体几何（直线和平面的位置关系）



关键思路解析:由边长关系,可以知道, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 为全等的直角三角形,其中 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. 这 2 个三角形有一条公共边,且关于通过公共边的中间的平面对称. 所以我们过 C 作 $CM \perp AB$, 过 D 作 $DM \perp AB$. 则 $AB \perp$ 平面 MCD . 所以整个体积为:

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle MCD} \cdot AB$$

下面要算出 $\triangle MCD$ 的面积.

解答:在三角形 ABC 中,斜边上的高 CM 为: $12/5$. 同理 $DM = 12/5$. 而 $CD = \frac{12}{5}\sqrt{2}$, 所以 $\triangle MCD$ 为等腰直角三角形,面积为: $S_{\triangle MCD} = \frac{1}{2} \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{72}{25}$. 因此,

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle MCD} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{72}{25} \cdot 5 = \frac{24}{5}$$

Answer: C

第 22 题

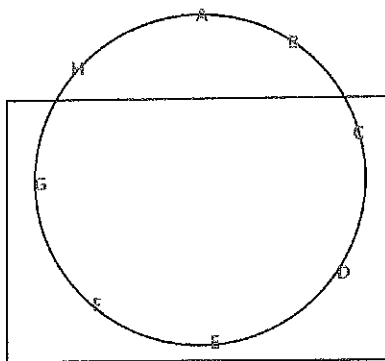
考点: 概率 (分类讨论、插空法)

关键思路解析: 每个人站着或者坐着都是随机的,因此总共 $2^8 = 256$ 种. 因为站着的人不能相邻,根据站着的人的个数,需要分类讨论,分别讨论可能的情况的个数.

解答: ①没有人站着,有 1 种可能.

②如果只有 1 人站着,那么有 8 种可能.

③如果只有 2 人站着,这 2 人不能相邻,先任意选 1 人,有 8 种选法,如下图中的 A,那么另外 2 人只能从 CDEFG 这 5 人中选择 1 人,一共有 5 种方法. 所以共 $8 \times 5 = 40$ 对. 但是这里面的每一对,在这样的计数中都被重复算了 2 次,所以总共 20 种方法.



④如果有3人站着，仍然先选第一人，有8种方法，比如上图中的A.剩下2人只能从CDEFG这5人中选择不相邻的2人，这就变成一排5个位置，选择2个不相邻的位置，直接运用插空法即可.先安排其中3个无关紧要的位置，形成4个空，从中选择2个，有 $C_4^2=6$ 种方法.这样选出来的三人组有 $8 \times 6 = 48$ 个.但是每个3人组都被重复算了3次，所以实际上不相邻的不同3人组共有 $48/3=16$ 组.

⑤如果有4人同时站着，那么只可能是A,C,E,G或B,D,F,H这2种.

⑥5个人同时站着不相邻不可能.

符合题意的可能性一共有 $1+8+20+16+2=47$. 概率为 $P = \frac{47}{256}$

Answer: A

第23题

考点：数论（不定方程）+多项式（韦达定理）

解答：这里，方程的根是整数，而要求的a是系数，所以就提示我们需要写出根和系数的关系：

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = a \\ r_1 r_2 = 2a \end{cases}$$

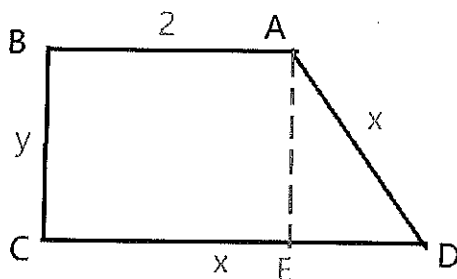
这里要求 r_1, r_2 都是整数，所以又是个数论问题，需要建立关于 r_1, r_2 的方

程: $r_1 r_2 = 2(r_1 + r_2)$, 即 $(r_1 - 2)(r_2 - 2) = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} -2 \\ -2 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$, 所以 $a = r_1 + r_2 = 8, 0, 9, -1$.

因此 a 的所有可能值之和为 16. 选 C.

第 24 题

考点: 代数 (一元二次不等式)



关键思路解析: 假设 $AD=CD=x$, $BC=y$, 则这里要求的 p 有多少种可能的值, 即试求 x 和 y 的取值可能性. $p < 2015$ 可以建立 x, y 的不等式, 而我们又能根据几何关系得到 x 和 y 的关系, 这样不等式就能全部化为关于 x 的不等式, 解出 x 的范围即可. 对于每一个 x 的取值, y 的取值唯一确定.

解答: 在直角三角形 AED 中, 由勾股定理, 得, $x^2 = y^2 + (x-2)^2$, 即, $x = \frac{y^2 + 4}{4}$.

因为 $p < 2015$, 所以, $2x + y + 2 < 2015$, 即 $\frac{y^2 + 4}{2} + y + 2 < 2015$, 整理得,

$y^2 + 2y - 4022 < 0$, $1 \leq y \leq 62$. 而 $x = \frac{y^2 + 4}{4}$ 且是整数, 所以 y 只能是偶数, 那么

$y = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 62$, 共 31 个, 每个 y 对应唯一的周长 p .

Answer: B

第 25 题

考点：概率（几何概型）

关键思路解析：因为这 2 个点在边上都是连续移动的，所以是几何概型。我们需要分：两点在同一边，在对边，在邻边这 3 种情况，分别计算概率。既然是几何概型，就需要把问题转化成几何图形，一般是构造变量，使用坐标系。

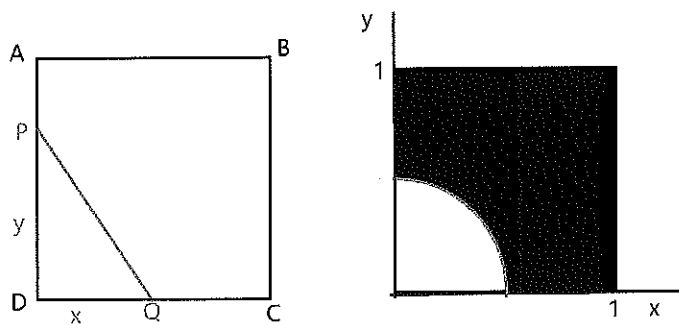
解答：

① 当两点在对边上，因为距离最短是 1，满足题目要求。所以 2 点在对边的概率为：先选第一个点，任意选择一边，概率为 1，再选第二个点，与第一个点对边，所以概率为 $1/4$ ，那么总的概率为 $1/4$ 。

② 当两点在邻边，任意取第一个点，概率为 1，第二个点需要在邻边，概率为 $1/2$ ，所以两点在邻边的概率为 $1/2$ 。下面求这 2 点相距至少 $1/2$ 的概率。假设其中一点为 P，在 AD 边上滑动，距离 D 点 x ，另一点 Q 在 CD 边上滑动，距离 D 点为 y 。因为 $PQ \geq 1/2$ ，所以

$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{2}$ ，即 $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$ ，这表示圆心在 $(0,0)$ ，半径为 $1/2$ 的圆的外部区域，

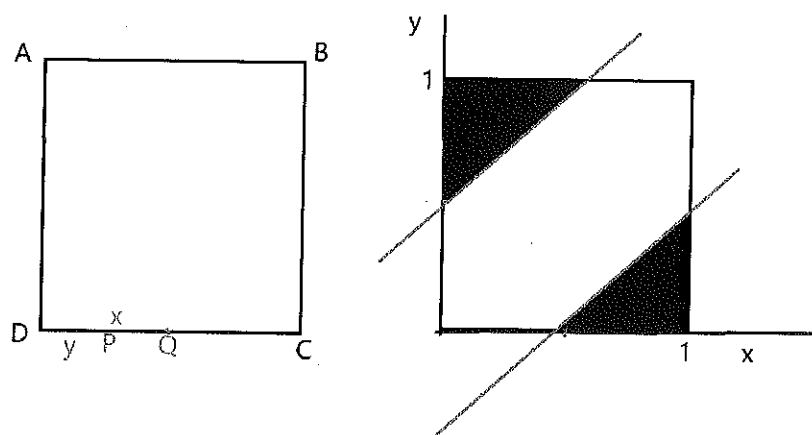
如下图所示。



所以总的概率为

$$P_2 = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{\frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{4}}{1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{32}$$

③若两点在同一边,与第②种情况类似,在同一边的概率为 $1/4$.下面算两点距离至少 $1/2$ 的概率.



如上图所示,假设 P, Q 都在边 CD 上, P 距 D 点 y , Q 距 D 点为 x . 那么 $|y-x| \geq 1/2$. 所以, $y-x \geq \frac{1}{2}$ 或者 $y-x \leq -\frac{1}{2}$, 所表示的区域如上右图黑色区域所示. 所以总的概率为

$$P_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

综上, 概率为

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{32} + \frac{1}{16} = \frac{26-\pi}{32}$$

$a+b+c=26+32+1=59$. 选 A。