

2015 AMC 10 B 解答

第1题

考点：算术

解答：

$$2 - (-2)^{-2} = 2 - \frac{1}{(-2)^2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\text{(C)} \frac{7}{4}}$$

第2题

考点：算术

解答：Marie 在 1 小时 40 分钟内完成 2 个任务，因此每个任务耗时 50 分钟。那

么从 2:40 开始经过 50 分钟后，时间为 $\boxed{\text{(B)} 3:30 \text{ PM}}$ 。

第3题

考点：不定方程

解答：设第一个数是 x ，第二个数是 y 。我们有 $2x + 3y = 100$ 。因为其中一个

数是 28，若 $x = 28$ ，那么 $3y = 44$ ， y 不是整数。所以 $y = 28$ ，代入原方程，

$$2x + 3(28) = 100, \text{ 解得, } x = \boxed{\text{(A)} 8}.$$

第4题

考点：算术

解答：假设这块比萨饼共 60 片，则 Alex 吃了 $\frac{1}{5} \times 60 = 12$ 片，Beth 吃了

$\frac{1}{3} \times 60 = 20$ 片，Cyril 吃了 $\frac{1}{4} \times 60 = 15$ 片，那么 Dan 吃了

$60 - (12 + 20 + 15) = 13$ 片。所以降序排列是 (C) Beth, Cyril, Dan, Alex

第 5 题

考点：逻辑推理

解答：因为 Marta 排名第 6，则 Jack 排名第 5，Todd 排名第 3，Rand 排名第 2，Hikmet 排名第 8。因此选 (B) Hikmet。

第 6 题

考点：逻辑推理

解答：Marley 周一打篮球，那么她周三打高尔夫球。周二必定游泳。否则就要在周四到周日这 4 天中选择不相邻的 3 天安排跑步，这不可实现。这样之后，还有 2 天跑步，1 天打网球，1 天游泳需要安排在周四到周日这 4 天中。因为打网球不可在游泳或跑步的后一天，因此打网球必在周四。周五和周日安排跑步，周六安排游泳。选 E。

第 7 题

考点：算术

解答：

$$1 \diamond 2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 因此 } (1 \diamond 2) \diamond 3 = \frac{1}{2} \diamond 3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

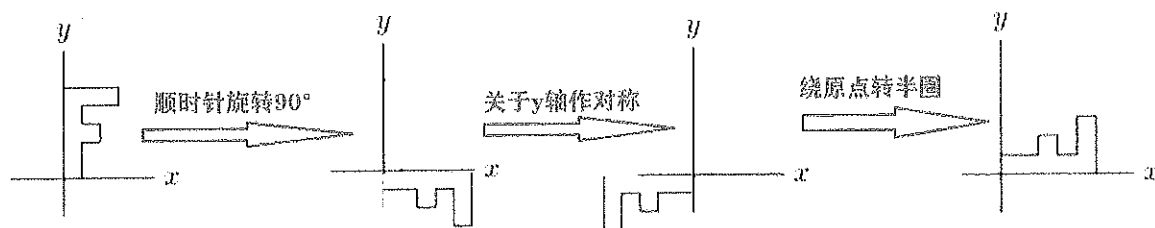
并且, $2 \diamond 3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, 所以 $1 \diamond (2 \diamond 3) = 1 - \frac{1}{5/3} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

所以 $((1 \diamond 2) \diamond 3) - (1 \diamond (2 \diamond 3)) = \frac{1}{6} - \frac{2}{5} = \boxed{(A) - \frac{7}{30}}$

第8题

考点: 平面几何 (几何变换)

解答:



由上图可知, 答案选 E。

第9题

考点: 平面几何 (求面积)

解答: 阴影部分的面积为大的 $\frac{1}{4}$ 圆的面积减去小的半圆的面积。大的 $\frac{1}{4}$ 圆的半径

为3, 因此面积为 $\frac{9\pi}{4}$ 。小的半圆的半径为 $\frac{3}{2}$, 因此面积为 $\frac{9\pi}{8}$, 那么阴影部分面

积是 $\frac{9\pi}{4} - \frac{9\pi}{8} = \boxed{(B) \frac{9\pi}{8}}$

第 10 题

考点：算术

解答：严格大于-2015 的负奇数为 $-1, -3, -5, -7, \dots, -2011, -2013$ 。一共有 1007 个数，而 1007 个负数相乘，结果为负。因为这些负奇数中有-5，因此相乘后个位必为 5，选 C。

第 11 题

考点：概率

解答：首先，一位的质数是 2, 3, 5, 和 7，因此个位和十位数字都是质数的两位数有 $4 \cdot 4 = 16$ 个，而一位质数有 4 个，因此小于 100 的正整数中，共有 $4 + 16 = 20$ 个这样的数。这 20 个数中，2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 和 73 是质数，共

8 个。因此概率为 $\frac{8}{20} = \boxed{(B) \frac{2}{5}}$

第 12 题

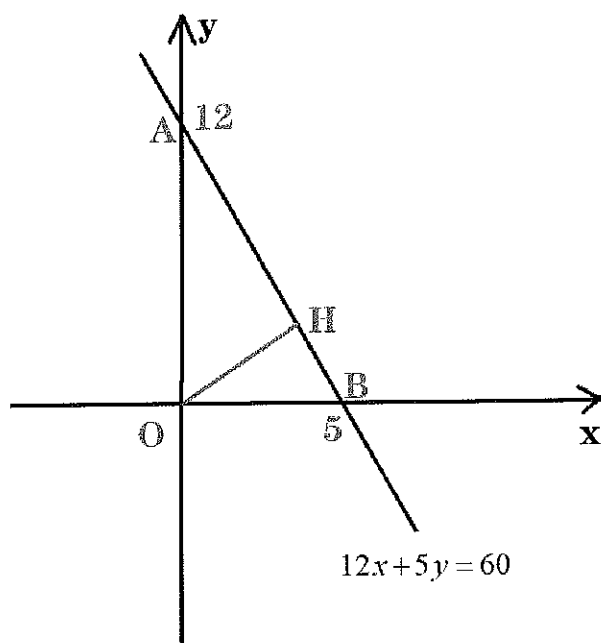
考点：解析几何（圆的方程）

解答：圆心为(5,5),半径为 10 的圆的方程为： $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 100$ 。因为点(x,-x)在圆上或内部，因此， $(x-5)^2 + (-x-5)^2 \leq 100$ ，解得 $-5 \leq x \leq 5$ 。满足这个条件的整数 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ ，共 11 个，选 A。

第 13 题

考点：平面几何+解析几何

解答：



如上图所示，过 O 作 $OH \perp AB$ 。因为 $OH \times AB = OA \times OB$ ，即 $OH \times 13 = 12 \times 5$ ，解得， $OH = \frac{60}{13}$ 。而其他两条高为 5 和 12，因此三条高之和为 $5 + 12 + \frac{60}{13} = \frac{281}{13}$ 。选 E。

第 14 题

考点：代数（解方程）

解答：

$$(x - b)(2x - (a + c)) = 0 \Rightarrow (x - b) \left(x - \frac{a + c}{2} \right) = 0, \text{ 因此原方程的根}$$

为 b 和 $\frac{a + c}{2}$ ，那么两根之和为 $b + \frac{a + c}{2}$ 。要使得这个和尽可能大，则应该首先

使得 a, b, c 都尽可能大，且 b 为三者中最大。因此 a, b, c 的值分别为 8, 9, 和 7，

$$\text{得到最大的和为 } 9 + \frac{8 + 7}{2} = 9 + 7.5 = \boxed{\text{(D) } 16.5}$$

第 15 题

考点：代数+数论（不定方程）

解答：假设有 x 匹马，那么人的个数为 $3x$ ，鸭子个数为 $9x$ ，假设有 y 头牛，那么绵羊有 $4y$ 只，因此镇上人、马、绵羊、牛和鸭子的总数为

$$3x + x + 4y + y + 9x = 13x + 5y。$$

因为 $41 = 16 \times 1 + 5 \times 3$; $59 = 13 \times 3 + 5 \times 4$; $61 = 13 \times 2 + 5 \times 7$; $66 = 13 \times 2 + 5 \times 8$ ，唯独 47 无法写成 $13x + 5y$ 的形式，因此选 B。

第 16 题

考点：概率（分类讨论）

关键思路解析：总的可能性是 $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$ 。接下来看哪些可能性满足题意：

Al	Bill	Cal
10	5	1
10	2	1
9	3	1
8	4	2
8	4	1
8	2	1
6	3	1
6	2	1
4	2	1

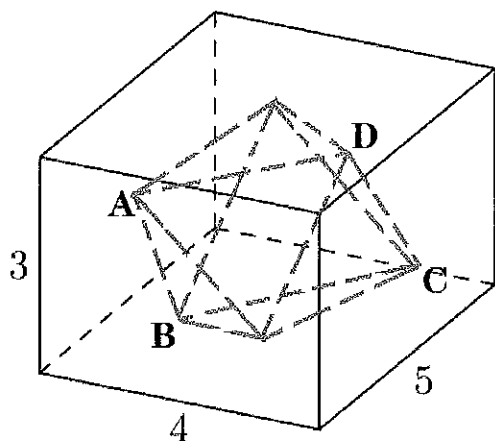
共表中所列 9 种可能性，所以概率为： $P = \frac{9}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{80}$ 。

Answer: C

第 17 题

考点：立体几何

解答：



此八面体可以看成是由两个全等的四棱锥组成，它们共同的底面是菱形 $ABCD$ ，

如上图所示。而菱形的对角线 $AC=4$, $BD=5$ 。因此菱形的面积是 $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$ 。

而正八面体的高为 3，因此八面体的体积为 $V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3 = 10$ ，选 B。

第 18 题

考点：概率（期望=平均值）

解答：因为期望就是平均值，因此第一次扔了后，平均 32 枚是正面朝上，32 枚

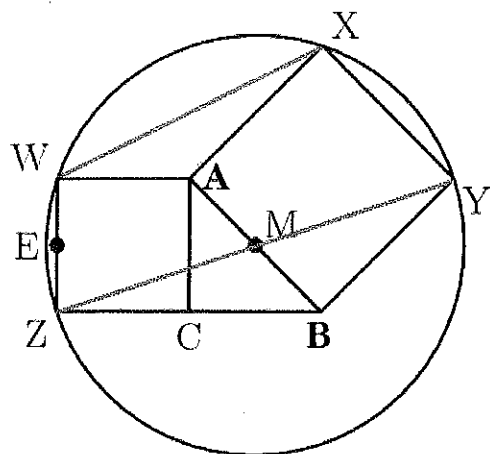
反面朝上。将这些 32 枚反面朝上的硬币再扔一次，平均有 16 枚正面朝上，16

枚反面朝上。再将这 16 枚反面朝上的硬币再扔第三次，平均有 8 枚反面朝上。

因此最终这 64 枚硬币中，平均 8 枚反面朝上，那么 56 枚正面朝上，选 D。

第 19 题

考点:平面几何(圆的内接四边形,相似三角形,勾股定理)



关键思路解析：这里需要满足 WXYZ 四点共圆，那么需要利用圆内接四边形的性质：对角互补，所以 $\angle WXY + \angle WZY = 180^\circ$ 即， $\angle WXA + 90^\circ + \angle WZY = 180^\circ$ 。因为 $\angle AXY + \angle WZC = 180^\circ$ ，即 $90^\circ + \angle WZY + \angle YZB = 180^\circ$ ，因此得到，

$\angle YZB = \angle WXA$. 同理也可以得到, $\angle XWA = \angle ZYB$, 因此 WXYZ 四点共圆的等价条件是 $\triangle AWX \sim \triangle BYZ$. 题目要求的是 $\triangle ABC$ 的周长, 那么就要求 AC 和 BC 的长度. 假设 $BC=x$, $AC=y$, 根据勾股定理, 可以得到 x, y 的方程. 另外一个方程可以由 $\triangle AWX \sim \triangle BYZ$ 得到.

解答: 在 $\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得到, $x^2 + y^2 = 144$. (1) 由 $\triangle AWX \sim \triangle BYZ$,

得到, $\frac{AX}{AW} = \frac{BZ}{BY}$, 即 $\frac{12}{y} = \frac{x+y}{12}$, 所以 $xy + y^2 = 144$, (2). 由方程 1, 2, 得到,

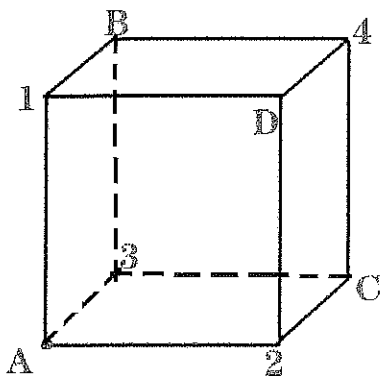
$x = y = 6\sqrt{2}$. 那么周长为 $12\sqrt{2} + 12$

Answer: C

第 20 题

考点：排列组合

解答：



如上图，将正方体的4个顶点用字母编号，其余4个用数字编号。蚂蚁每次沿着棱只能从字母爬到数字，或从数字爬到字母。假设用L表示编号为字母的顶点，N表示编号为数字的顶点，那么蚂蚁从A出发，它爬行7步经过的顶点一定是LNLNLNLN。最后到达某个数字顶点。但要求回不到A，则最后一定到达数字“4”。因此蚂蚁实际经过的顶点为ANLNLNL4。下面先将三个数字顶点分配到标有“N”的位置，共 $3!=6$ 种方法。而对于这每一种分配结果，将剩余的3个字母顶点分配到标有“L”的位置只有唯一一种方法。例如将3,1,2分别分配给三个“N”位置，则此时路径变为：A3L1L2L4，那么“3”和“1”之间的L位置只能放B，因为3只能经过B到达1；类似的，1和2之间的L位置只能放D，2和4之间的L位置只能放C，那么路径为A3B1D2C4。

综上，共6种方法。选A。

第21题

考点：代数（数形结合，天花板函数）（AMC10/12 教材里有讲解）

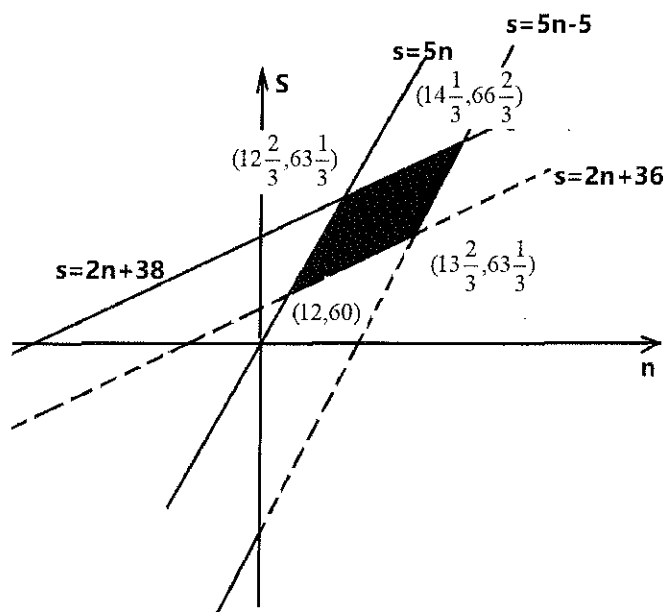
关键思路解析：根据题意意思，Cozy 总共跳的次数是： $\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ ，Dash 总共跳的次数

为： $\left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil$ ，所以 $\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil = 19$ 。这里处理天花板函数的手段跟地板函数类似：把天花

板函数包起来的那部分设为一个整数，即，设 $\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil = m$ ， $\left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil = n$ ，所以

$$\begin{cases} m-n=19 \\ m-1 < \frac{s}{2} \leq m \\ n-1 < \frac{s}{5} \leq n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m-n=19 \\ 2m-2 < s \leq 2m \\ 5n-5 < s \leq 5n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(n+19)-2 < s \leq 2(n+19) \\ 5n-5 < s \leq 5n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2n+36 < s \leq 2n+38 \\ 5n-5 < s \leq 5n \end{cases}$$

画出 s - n 的不等式图像如下图：



上图中黑色阴影部分为可行区域。可以看到， n 的取值范围为 $12 < n \leq 14\frac{1}{3}$ 。因为 n

是整数，所以 $n = 13, 14$ 。当 $n = 13$ 时，代入原不等式，得， $\begin{cases} 62 < s \leq 64 \\ 60 < s \leq 65 \end{cases} \rightarrow 62 < s \leq 64$ ，

因此 $s = 63, 64$ 。当 $n = 14$ 时，得， $\begin{cases} 64 < s \leq 66 \\ 65 < s \leq 70 \end{cases} \rightarrow 65 < s \leq 66$ ，因此 $s = 66$ 。综

上, $s = 63, 64, 66$, $63 + 64 + 66 = 193$, 选 D。

第 22 题

考点: 平面几何 (相似三角形)

解答: 容易得到, $FG = FJ, JH = JD$, 因此

$FG + JH + CD = FJ + JD + CD = FD + CD = ED + CD = 2 \cdot CD$, 因此我们只要求

正五边形 ABCDE 的边长即可。因为 $\triangle AFG \sim \triangle BAF$, 所以 $\frac{BF}{AG} = \frac{AF}{FG}$, 设边长

$AB = x$, 则 $BF = AB = x, FG = BF - BG = BF - AG = x - 1$, 所以 $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$, 解得,

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 因此 $FG + JH + CD = 2x = 1 + \sqrt{5}$, 选 D。

第 23 题

考点: 数论 ($n!$ 结尾 0 的个数)

解答: 由题意, $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots = k$ 以及 $\left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{5^3} \right\rfloor + \dots = 3k$ 。因为

要求最小的 n , 因此从最小的 k 开始尝试。

①若 $k=1$, 那么 $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots = 1$, $\left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{5^3} \right\rfloor + \dots = 3$ 。由第一个方

程, $\begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor = 1 \\ \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor = 0 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} 1 \leq \frac{n}{5} < 2 \\ \frac{n}{5^2} < 1 \end{cases}$, 则 $5 \leq n < 10$, $10 \leq 2n < 20$, 所以 $\left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor = 3$,

$3 \leq \frac{2n}{5} < 4$, $7.5 \leq n < 10$, $n=8$ 或 $n=9$ 。

注意: 当得到 $5 \leq n < 10$ 后, 也可以将 $n=5, 6, 7, 8, 9$ 分别代入第二个方程检验。

② $k=2$. 那么 $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots = 2$, $\left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{5^3} \right\rfloor + \dots = 6$. 由第一个方程,

$$\begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor = 2 \\ \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2 \leq \frac{n}{5} < 3 \\ \frac{n}{5^2} < 1 \end{cases}, \text{ 则 } 10 \leq n < 15, \text{ 将 } n=10, 11, 12, 13, 14 \text{ 分别代入第二个}$$

方程检验, 发现只有当 $n=13, 14$ 时符合。

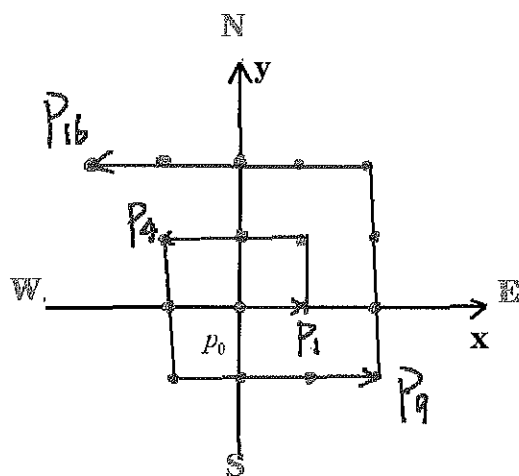
综上, 最小的 4 个 n 是 8, 9, 13 和 14, 它们的和为 $s=44$, s 的各个位上数字和为 8,

选 B。

第 24 题

考点: 数列

解答:



$$P_{45^2} = 2025$$

先观察蚂蚁位置的横坐标的变化: 从上图可以看到, 蚂蚁的横坐标首先 $+1$ 到 P_1 ,

然后 -2 到 P_4 , 接着 $+3$ 到 P_9 , 接着 -4 到 P_{16} , ..., $+45$ 到 P_{2025} , 其中 $2025 = 45^2$ 。

点 P_{2025} 的横坐标为

$$1-2+3-4+5-6+\dots-44+45=-1-1-1-\dots-1+45=-22+45=23。$$

而我们要求的是 P_{2015} 的横坐标，只要从 P_{2025} 向左退 10 步即可，因此横坐标为

$23-10=13$ 。选项中横坐标为 13 的只有 D。因此选 D。

纵坐标可以这样确定：对于点 P_{2025} ，其纵坐标为负，且纵坐标的绝对值比横坐标的绝对值小 1，即纵坐标绝对值为 22，那么 P_{2025} 的纵坐标为 -22。而从 P_{2025} 向左退 10 步到 P_{2015} ，纵坐标不变，因此 P_{2015} 的纵坐标为 -22。

第 25 题

考点：数论（不定方程 SFFT）

关键思路解析：这里由于 a, b, c 都是整数，且题中还给定了有关 a, b, c 的方程，所以这是一道解不定方程的数论问题。我们列出方程后，用前面讲的几种解不定方程的方法解决即可。

解答：由题意， $2ab+2bc+2ca=abc$ ，两边除以 abc 化简，得， $\frac{2}{c}+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1$ 。根据

$1 \leq a \leq b \leq c$ ，可以得到 a 的取值范围。之后对 a 分类讨论。

$$1 = \frac{2}{c} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \leq \frac{2}{a} + \frac{2}{a} + \frac{2}{a} = \frac{6}{a}, \rightarrow 1 \leq a \leq 6. \text{ 由 } \frac{2}{c} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1, \text{ 知道, } a \neq 1, 2. \text{ 所以, } 3 \leq a \leq 6.$$

(1) 当 $a=3$ 时，原不定方程化为： $\frac{2}{c} + \frac{2}{b} = \frac{1}{3}$ ，即 $6b+6c=cb \rightarrow cb-6c-6b=0$ ，这

即是 SFFT 的模型。 $(c-6)(b-6)=36$ ，而 $(c-6) \geq (b-6)$ ，所以 $\begin{cases} (c-6)=36, 18, 12, 9, 6 \\ (b-6)=1, 2, 3, 4, 6 \end{cases}$

解出 (b, c) 有序对总共 5 对。

(2) 同理, 当 $a=4$, 原不定方程通过 SFFT 化成: $(c-4)(b-4)=16$. 可解出

$$\begin{cases} (c-4)=16, 8, 4 \\ (b-4)=1, 2, 4 \end{cases} \text{ 共 3 对.}$$

(3) 当 $a=5$, 原不定方程化为: $3bc-10c-10b=0$. 此处无法用 SFFT, 只能另想办法.

注意到 b 和 c 是有大小关系的, 所以我们依然可以使用对待原始不定方程一样的

方法, 先求出其中一个变量, 如 b 的范围, 然后对 b 分类讨论. 对方程两边除以

bc , 得, $\frac{3}{10} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$, $\frac{3}{10} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$, 所以, $b \leq 6\frac{2}{3}$, 而 $b \geq a \geq 5$, 因此

$b=5$ 或 6 . 当 $b=5$ 时, 代入 $\frac{3}{10} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$, 求得, $c=10$. 而当 $b=6$ 时, c 不是整

数, 舍去. 总之, $a=5$ 时, 有一组满足题意的整数解.

(4) 当 $a=6$, 原不定方程化为: $(b-3)(c-3)=9$. 我们可以继续用 SFFT. 因为

$c \geq b \geq a \geq 6$, 所以只可能 $b-3=3$, $c-3=3$, 只有一组解.

综上, 符合题意的 (a, b, c) 总共有 10 组.

Answer: B