

2016 AMC 10 A 解答

第1题

考点：算术

解答： $\frac{11! - 10!}{9!} = \frac{11 \cdot 10! - 10!}{9!} = \frac{100 \cdot 9!}{9!} = 100$ ，因此选 (B) 100

第2题

考点：代数（解方程）

解答：因为 $10^x \cdot 100^{2x} = 1000^5$ ，所以 $10^{5x} = 10^{15}$ ， $x = 3$ ，选 C。

第3题

考点：算术

解答：Ben 总共花了 $\frac{12.5}{0.25} \cdot 1 = 50$ 美元，而 David 总共花了 $50 - 12.5 = 37.5$ 美元。

因此他们俩一起总共花了 87.5 美元，选 C。

第4题

考点：算术

解答：

$$\begin{aligned}
 \text{rem} \left(\frac{3}{8}, -\frac{2}{5} \right) &= \frac{3}{8} - \left(-\frac{2}{5} \right) \left\lfloor \frac{\frac{3}{8}}{-\frac{2}{5}} \right\rfloor \\
 &= \frac{3}{8} - \left(-\frac{2}{5} \right) \left\lfloor \frac{3}{8} \times \frac{-5}{2} \right\rfloor \\
 &= \frac{3}{8} - \left(-\frac{2}{5} \right) \left\lfloor \frac{-15}{16} \right\rfloor \\
 &= \frac{3}{8} - \left(-\frac{2}{5} \right) (-1) \\
 &= \frac{3}{8} - \frac{2}{5} \\
 &= \boxed{\text{(B)} - \frac{1}{40}}.
 \end{aligned}$$

第5题

考点：立体几何

解答：假设长方体盒子的三边长分别为 $x, 3x, 4x$ ，因此体积为 $12x^3$ 。观察选项，

只有当 $12x^3 = 96$ 时，解出 $x = 2$ 才是个整数。答案选 D。

第6题

考点：算术

解答：1 到 30 的数中，十位上是 1 的数是 10, 11, 12, 13, ..., 19 共 10 个，将所有

十位上的 1 换成 2，总和增加了 100；1 到 30 的数中，个位上是 1 的数是 1, 11, 21

共 3 个，将所有个位上的 1 换成 2，总和增加了 3。因此总和增加 103。选 D。

第7题

考点：数据分析（平均值，中位数，众数）

解答：因为平均值为 x ，所以 $\frac{60+100+x+40+50+200+90}{7} = x$ ，解得， $x = 90$ 。

选 D。

第 8 题

考点：算术

解答：假设一开始狐狸有 x 枚硬币，因此经过 3 次过桥后，有

$2[2(2x-40)-40]-40=0$ ，解得， $x=35$ ，选 C。

第 9 题

考点：等差数列

解答：根据题意， $1+2+3+\cdots+(N-1)+N=\frac{N(N+1)}{2}=2016$ 。

注意到 $\frac{63 \cdot 64}{2}=2016$ ，因此 $N=63$ ，所以答案为 **(D) 9**。

第 10 题

考点：平面几何+数列

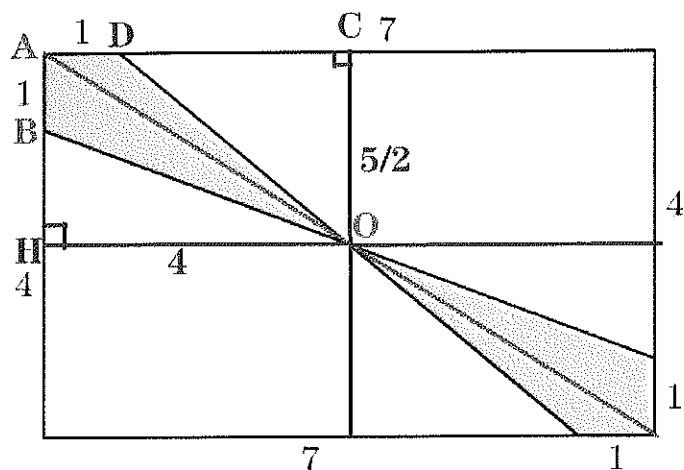
解答：设最里面的长方形的长为 x ，则这个长方形的面积是 $x \cdot 1 = x$ 。第二大的长方形的长宽为 $x+2$ 和 3，因此面积为 $3x+6$ 。那么里层阴影部分的面积为 $3x+6-x=2x+6$ 。最大的长方形的长宽为 $x+4$ 和 5，面积为 $5x+20$ 。那么最外层阴影部分面积为 $(5x+20)-(3x+6)=2x+14$ 。因为 $x, 2x+6, 2x+14$ 成等差数列，所以

$$(2x+6)-(x)=(2x+14)-(2x+6) \implies x+6=8 \implies x=2 \implies \mathbf{B}$$

第 11 题

考点：平面几何

解答：



阴影部分面积为四边形 ABOD 面积的 2 倍。而 $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$,

$S_{\triangle ADO} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$, 因此阴影部分的面积是 $S = 2(2 + \frac{5}{4}) = 6.5$, 选 D。

第 12 题

考点：概率

解答：1 到 2016 之间，共有 1008 个奇数。而 3 个整数相乘的乘积为奇数，表明

这 3 个整数均为奇数，因此是从 1008 个奇数中选择 3 个奇数，有 C_{1008}^3 种方法。

那么概率为

$$P = \frac{C_{1008}^3}{C_{2016}^3} = \frac{1008 \times 1007 \times 1006}{2016 \times 2015 \times 2014} = \frac{1}{2} \times \frac{1007}{2015} \times \frac{1006}{2014} < \frac{1}{2} \times \frac{1007}{2014} \times \frac{1006}{2012} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

选 A。

第 13 题

考点：逻辑推理

解答：注意到这 5 人的座位编号之和在移动前后不发生改变。因此假设向右移位为正，那么向左位移为负。假设 Ada 的位移为 x ，则 $2-1+x=0$ ， $x=-1$ ，表明 Ada 向左移动了一个位置，坐到了最边上的位置。这个最边上的位置只能是最左边第 1 张位置，因此 Ada 原来是坐在第 2 张位置。选 B。

第 14 题

考点：数论（不定方程）

关键思路分析：根据题目意思， $2016=2x+3y$ ，这里 x 和 y 都是非负整数。那么题目即是求这个线性不定方程的非负整数解的个数。

解答：对不定方程两边模 2，得， $3y \equiv 0 \pmod{2}$ ，即， $y \equiv 0 \pmod{2}$ ，所以 $y=2k$ ，代入原不定方程，得， $x=1008-3k$ 。因为 $x=1008-3k \geq 0$ 且 $y=2k \geq 0$ ，因此， $0 \leq k \leq 336$ 。每一个 k 都唯一确定 x 和 y 。所以一共有 337 个解。

Answer: C

第 15 题

考点：平面几何（圆的面积）

解答：大圆的半径为 3，面积为 9π ，小圆的面积为 π ，因此 7 个小圆的面积总和为 7π ，那么大圆和 7 个小圆的面积之差为 2π ，即为边角料的面积，假设做成的圆形曲奇的半径为 r ，则 $2\pi = \pi r^2$ ， $r = \sqrt{2}$ 。选 A。

第16题

考点：平面几何（几何变换）

解答： $A(0, 2)$, $B(-3, 2)$, 和 $C(-3, 0)$ 首先经过 x 轴对称，得到 $A'(0, -2)$, $B'(-3, -2)$, $C'(-3, 0)$. 然后绕着原点逆时针旋转 90° ，得到， $A''(2, 0)$, $B''(2, -3)$, $C''(0, -3)$. 把最后这3点的坐标与一开始 ABC 三点的坐标比较，发现它们关于 $y=x$ 对称，所以选 D.

第17题

考点：概率（插空法）

关键思路解析：这道题我们可以采用插空法. 可以看成，首先把 N 个绿球排成一排，一共形成 $N+1$ 个空，然后红球插入空隙中. 要保证红球一边至少有绿球总数的 $\frac{3}{5}$ ，那么我们从左边第一个空开始放红球，从左边第一个空开始，要保证右边至少有绿球总数的 $\frac{3}{5}$ ，往右数到第 $\frac{3}{5}N+1$ 个空是红球所能放到的最右边的空，即右边 $\frac{3}{5}N$ 个空不能放红球，那么左边的 $(N+1) - \frac{3N}{5} = \frac{2N}{5} + 1$ 个空均可放红球. 同理，根据对称性，右边的 $\frac{2}{5}N+1$ 个空也可以. 所以一共 $\frac{4}{5}N+2$ 个空都可以满足题意，得到

$$P(N) = \frac{\frac{4}{5}N+2}{N+1} < \frac{321}{400}$$

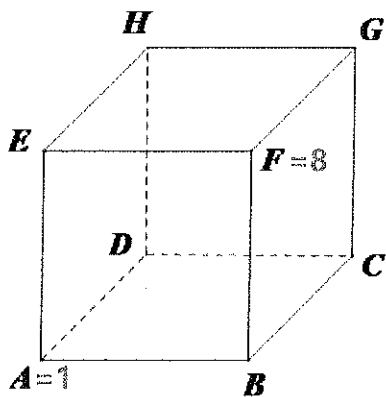
解得， $N > 479$. N 最小是 480.

解答： N 最小是 480. 选 A.

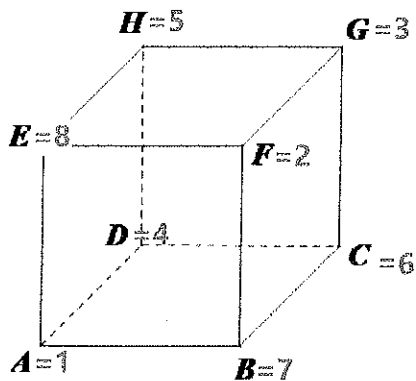
第 18 题

考点：排列组合

解答：先假设每个面上所有数字之和为 x ，则， $6x = 3 \cdot (1+2+3+\dots+8) = 108$ ，所以 $x = 18$ 。再考虑 1 和 8 这 2 个极端的数字是否必须在一根棱上的两个端点，如下所示：



若 1 和 8 分别是不在同一条棱上的两个顶点，如上图中 $A=1$ ， $F=8$ 。因为 $A+D=F+G \rightarrow 1+D=8+G$ ，得到， $D-G=7$ 。而剩下的 2,3,4,5,6,7 中，不存在两个数字之差为 7。因此 1 和 8 一定分布在同一条棱上。若固定棱 $A-E=1-8$ ，则棱 $B-F, C-G, H-D$ 对应 2-7, 3-6, 4-5 (不一定是以这样的顺序依次对应。) 这样能保证每个侧面的 4 个数之和为 18。还要保证上面 $E+F+G+H=18$ ，则还需要把这竖着的 3 根 $B-F, C-G, H-D$ 中的 1 根或几根上下翻转 (8 一定和 2，而不是 7，在同一个面。因此是 8,2,3,5 在同一个面)。一种可能性如下图，



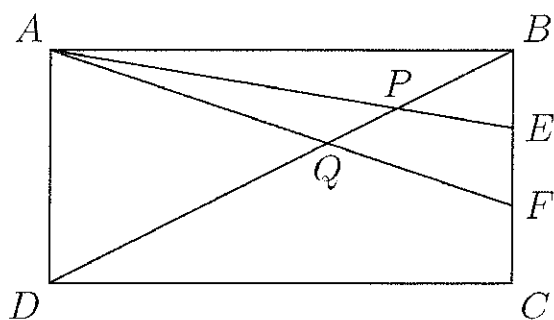
但是竖着的这4条棱 $A-E, B-F, C-G, H-D$ 还可以进行圆排列(或者更简单的看成 2,3,5,8 在上面这个面上的圆排列), 共 $3!=6$ 种方法.

Answer: C

第 19 题

考点: 平面几何 (相似三角形)

解答:



因为 $\triangle APD \sim \triangle EPB$, $\frac{DP}{PB} = \frac{AD}{BE} = 3$. 因此, $PB = \frac{BD}{4}$. 类似

的, $\frac{DQ}{QB} = \frac{3}{2}$. 所以 $DQ = \frac{3 \cdot BD}{5}$. 因此

$$r : s : t = \frac{1}{4} : \frac{2}{5} - \frac{1}{4} : \frac{3}{5} = 5 : 3 : 12, \text{ 所以 } r + s + t = \boxed{\text{(E)} 20}.$$

第 20 题

考点: 排列组合 (球和罐子模型)

关键思路解析: $(a+b+c+d+1)^N$ 可以被展开成:

$$(a+b+c+d+1)^N = \sum_{k=0}^N C_N^k (a+b+c+d)^k. \text{ 要 } a, b, c, d \text{ 都包含, 则 } 4 \leq k \leq N. \text{ 对于给}$$

定的 k , 如 $(a+b+c+d)^k$, 需要求展开项里都含有 a, b, c, d 的项的个数. 这就变成把

因为 $QQ'=2$, $PP'=1$, 因此, $DP'=QQ'=2$, $DP=DP'-PP'=1$. 在直角三角形 DPQ 中, 因为 $DP=1$, $PQ=1+2=3$, 因此 $DQ=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$. 那么 P 的坐标为 $P(-2\sqrt{2}, -1)$. 同理, $RE=RR'-ER=RR'-QQ'=3-2=1$, and $RQ=2+3=5$. 在直角三角形 RQE 中, 由勾股定理, $QE=\sqrt{25-1}=2\sqrt{6}$. 所以 $R(2\sqrt{6}, 1)$.

因此 $P(-2\sqrt{2}, -1)$, $R(2\sqrt{6}, 1)$, $Q(0, 0)$. 由鞋带定理, 算得面积为 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

Answer: D

注意: 这道题的面积也可以由梯形面积的加减得到.

第 22 题

考点: 数论 (正因子个数)

关键思路分析: 先把 $110n^3$ 质因数分解, 后再根据结果 110 反推质因数分解的可能性.

解答: $110n^3 = 2 \times 5 \times 11 \times n^3$, 而结果 $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ 最多是 3 个质因数相乘. 由此推断, n 的质因数必定只有 2, 5 和 11. 假设 $n = 2^a 5^b 11^c$, 则

$$110n^3 = 2^{3a+1} \times 5^{3b+1} \times 11^{3c+1}. \text{不失一般性, 令 } 3a+1=2, 3b+1=5, 3c+1=11,$$

那么 $a=0, b=1, c=3$. 因此 $81n^4 = 3^4 5^4 11^{12}$, 一共有 $5 \cdot 5 \cdot 13 = 325$ 个正因子. 选择 D

第 23 题

考点: 代数 (新定义)

解答: 因为 $2016 \diamond (6 \diamond x) = 100$, 所以 $(2016 \diamond 6) \cdot x = 100$. 所以要求 $2016 \diamond 6$. 令

$$a = 2016, b = 6, c = 6, \text{ 所以 } 2016 \diamond (6 \diamond 6) = (2016 \diamond 6) \cdot 6, \text{ 即 } 2016 \diamond 1 = (2016 \diamond 6) \cdot 6,$$

所以还要求 $2016 \diamond 1$. 令 $a = 2016, b = 2016, c = 2016$, 所以

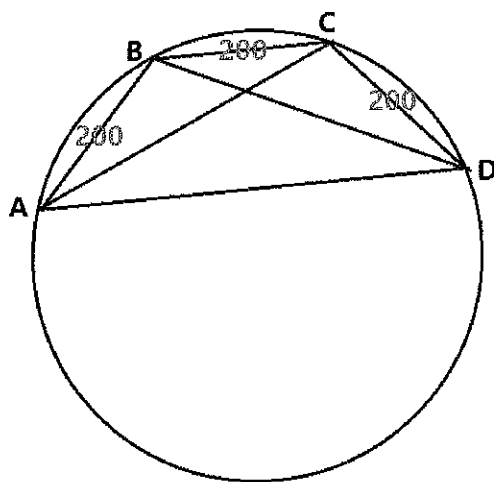
$2016 \diamond (2016 \diamond 2016) = (2016 \diamond 2016) \cdot 2016$, 即 $2016 \diamond 1 = 1 \cdot 2016 = 2016$ 。所以

$2016 = (2016 \diamond 6) \cdot 6$, $(2016 \diamond 6) = \frac{2016}{6} = 336$, 所以方程 $(2016 \diamond 6) \cdot x = 100$ 变为

$336 \cdot x = 100$, 解得, $x = \frac{100}{336} = \frac{25}{84}$, 那么 $p+q=109$, 选 A。

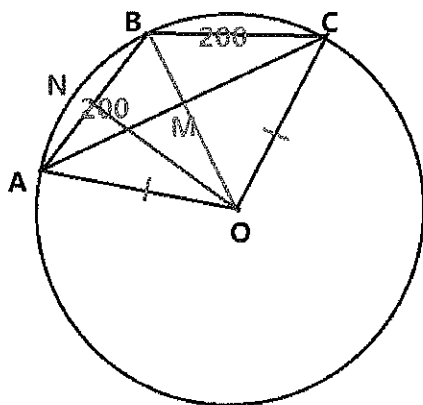
第 24 题

考点: 平面几何 (托勒密定理)



关键思路解析: 这里圆内接四边形 ABCD 的三条边都知道长度, 要求第四条边的长度, 想到用托勒密定理, 不过还会涉及到对角线的长度. 由托勒密定理, 得, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$, 即, $200 \cdot 200 + 200 \cdot AD = AC \cdot BD$. 通过观察图形, 可以看到, $AC = BD$, 因为弧 $AB =$ 弧 $BC =$ 弧 CD , 所以弧 $ABC =$ 弧 BCD , 因此 $AC = BD$. 那么原方程变成 $200 \cdot 200 + 200 \cdot AD = AC^2$. 接下来求 AC 长度即可.

解答: 由分析, 先求 AC 长度. 图形简化如下:



因为 $AB=BC$, $AO=CO$, 所以 BO 垂直平分 AC , 那么 $AC=2AM$, 而 AM 为 $\triangle ABO$ 的高. 在等腰三角形 ABO 中, 过 O 作 $ON \perp AB$, 所以 $BN=100$, 因为 $BO=200\sqrt{2}$, 因此

$NO=100\sqrt{7}$. 因为 $AB \cdot NO = BO \cdot AM$, 代入得, $200 \cdot 100\sqrt{7} = 200\sqrt{2} \cdot AM$, 所以 $AM = \frac{100\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$, 那么 $AC = 2AM = 100\sqrt{14}$, 代入 $200 \cdot 200 + 200 \cdot AD = AC^2$, 得,

$200 \cdot 200 + 200 \cdot AD = 14 \cdot 100^2$, 解得, $AD = 500$.

Answer: E

第 25 题

考点: 数论 (最大公约数和最小公倍数)

解答:

$$\text{lcm}(x, y) = 72 = 2^3 \cdot 3^2,$$

$$\text{lcm}(x, z) = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2,$$

$$\text{lcm}(y, z) = 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

注意: 求两个或多个数的最小公倍数, 对于每个质因数是选取指数最大的那个。

我们用符号 $2^{\leq 3}$ 表示质因数 2 的指数不超过 3。首先由上面 3 个式子, 判断质因

数 2 在 x, y, z 中的分布情况。可以看到, 结果中质因数 2 有 2^3 和 2^2 这两种。 y 和 z 中不可能含有 2^3 , 否则就和第三个方程矛盾。 x 含有 2^3 , 这符合第一个和第二个方程。且由第三个方程知道, y 和 z 中至少有一个含有 2^2 , 其余含有 $2^{\leq 1}$ 。所以质因数 2 分布如下图所示:

$$x: \underline{2^3} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

$$y: \underline{2^{\leq 1}} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

$$z: \underline{2^{\leq 1}} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

类似的, 再判断质因数 3. x 和 z 中不可能含有 3^2 , 否则就和第二个方程矛盾, y 含有 3^2 , 这符合第一个和第三个方程。且由第二个方程知道, x 和 z 中至少有一个含有 3, 其余不含有 3。所以质因数 3 分布如下图所示:

$$x: \underline{2^3} \quad \underline{3^{\leq 1}} \quad \underline{\quad}$$

$$y: \underline{2^{\leq 1}} \quad \underline{3^2} \quad \underline{\quad}$$

$$z: \underline{2^{\leq 1}} \quad \underline{3^{\leq 1}} \quad \underline{\quad}$$

类似的, 再判断质因数 5. x 和 y 中不可能含有 5, 否则就和第一个方程矛盾, z 含有 5^2 , 这符合第二个和第三个方程。所以质因数 5 分布如下图所示:

$$x: \underline{2^3} \quad \underline{3^{\leq 1}} \quad \underline{\quad}$$

$$y: \underline{2^{\leq 1}} \quad \underline{3^2} \quad \underline{\quad}$$

$$z: \underline{2^{\leq 1}} \quad \underline{3^{\leq 1}} \quad \underline{5^2}$$

由上图知道, y 的质因数 2 有 $2^0, 2^1, 2^2$ 这 3 种取值, z 的质因数 2 也有 $2^0, 2^1, 2^2$ 这 3 种取值, 共 $3 \times 3 = 9$ 种搭配。但 y 和 z 至少有一个有 2^2 。我们先考虑反面, 即它

们都不含 2^2 ,那么共有 $2 \times 2 = 4$ 种搭配。因此 y 和 z 至少有一个有 2^2 的搭配有 $9 - 4 = 5$ 种。

同理, x 的质因数3有 $3^0, 3^1$ 这2种取值, z 的质因数3也有 $3^0, 3^1$ 这2种取值,共 $2 \times 2 = 4$ 种搭配。但 x 和 z 至少有一个有 3^1 。我们先考虑反面,即它们都不含 3^1 ,那么共有 $1 \times 1 = 1$ 种搭配。因此 y 和 z 至少有一个有 3^1 的搭配有 $4 - 1 = 3$ 种。

综上,符合要求的有序正整数三元组 (x, y, z) 共 $5 \times 3 = 15$ 组,选A。