

2016 AMC 10 B 解答

第1题

考点：算术

解答：

化简原式，得到 $\frac{\frac{1}{a} \cdot (2 + \frac{1}{2})}{a} = \frac{\frac{5}{2}}{a^2}$ ，将 $a = \frac{1}{2}$ 代入， $\frac{5}{2} \cdot 2^2$ ，因此答案为 **(D) 10**。

第2题

考点：算术

解答： $\frac{2^3(2^2)^2}{(2^2)^3 2^2} = \frac{2^7}{2^8} = \frac{1}{2}$ ，所以答案选 **(B)**。

第3题

考点：算术

解答：

将 $x = -2016$ 代入，得到 $\left| \left| 2016 - (-2016) \right| - 2016 \right| - (-2016)$ ，化简得，
 $|4032 - 2016| + 2016 = 2016 + 2016 = 4032$ ，因此答案选 **(D)**。

第4题

考点：数列（等差数列）+数论（余数）

解答：读完这 15 本书，总共需要的天数为 $1+2+3+\dots+15=120$ 天。因为

$120 \equiv 1 \pmod{7}$ ，因此是个周一，选 B。

第5题

考点：数据分析（平均值，中位数）

解答：4个表妹年龄总和为32岁，因为年龄的中位数是5，所以从小到大排序后，中间位置的两个年龄的平均值为5，表明中间两个年龄的总和为10，因此最大和最小表妹年龄和为 $32-10=22$ ，选D。

第6题

考点：算术

解答：观察选项，最小的是1，也就是 $S=100$ ，而两个三位数相加，和不可能为100，排除A。再看B，S的各位上数字和为4，则可能是400，而 $400=132+268$ 是可以写成2个三位数之和的，因此答案选B。

第7题

考点：代数（解应用题）

解答：令这两个锐角分别是 $5k$ 和 $4k$ ，所以 $90-4k=2(90-5k)$ ，解得， $k=15$ 。

因此这两个角度数之和为 $5k+4k=9k=135$ ，选C。

第8题

考点：数论（求余）

解答：我们先计算 2015^k 模100的余数，看是否存在周期性。

$$2015^1 \equiv 15(\text{mod}100)$$

$$2015^2 \equiv 15^2 \equiv 25(\text{mod}100)$$

$$2015^3 \equiv 25 \cdot 15 \equiv 75(\text{mod}100)$$

$$2015^4 \equiv 75 \cdot 15 \equiv 25(\text{mod}100)$$

$$2015^5 \equiv 25 \cdot 15 \equiv 75(\text{mod}100)$$

.....

可以看到, 当 $k \geq 2$ 后, k 为偶数时, 最后两位是 25, k 为奇数时, 最后两位是 75, 因此 $2015^{2016} - 2017 \equiv 25 - 17 \equiv 08(\text{mod}100)$, 因此十位是 0, 选 A。

第 9 题

考点: 解析几何 (二次函数)

解答: 设 $BC = 2x$, 所以 $B(x, x^2)$, 因此 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的高为 x^2 , 那么

$$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x^2 = 64, \text{ 解得, } x = 4, \text{ 所以 } BC = 2x = 8, \text{ 选 C.}$$

第 10 题

考点: 平面几何 (相似三角形)

解答: 这 2 块三角板的重量之比等于面积之比, 而因为这 2 个三角形相似, 因为

$$\text{面积比等于边长比的平方. 设第二块木板的重量为 } x \text{ 盎司, 则 } \frac{x}{12} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9},$$

因此 $x = 33.3$, 选 D。

第 11 题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：设花园的短边（包括角落）有 x 根木桩，长边（包括角落）有 $2x$ 根木桩。那么木桩总数为 $2 \cdot x + 2 \cdot 2x - 4 = 20$ ，解得， $x = 4$ ，因此短边有 4 根木桩，长边有 8 根木桩。则短边的长度为 $4 \times 3 = 12$ 码，长边长度为 $4 \times 7 = 28$ 码，那么面积为 $12 \times 28 = 336$ ，选 B。

第 12 题

考点：概率

解答：要求乘积为偶数，则两个数至少有一个数是偶数。我们可以先考虑反面，即乘积是奇数，则两个数均为奇数，是从 1, 3, 5 种选择 2 个数，共 $C_3^2 = 3$ 种方法，因此乘积为奇数的概率为 $P_1 = \frac{3}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ ，那么乘积为偶数的概率为 $P = 1 - P_1 = \frac{7}{10}$ ，选 D。

第 13 题

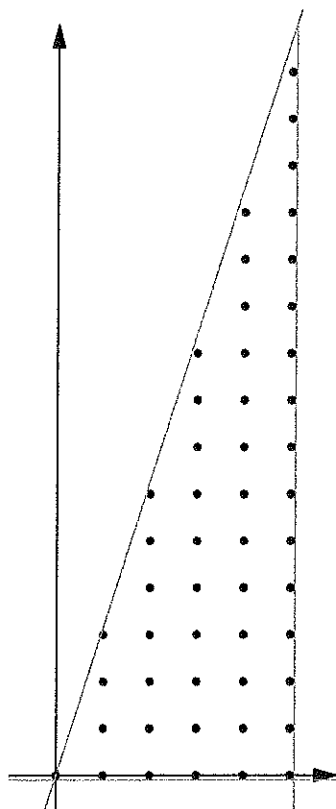
考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设四胞胎一共 x 组，则三胞胎共 $4x$ 组，双胞胎共 $12x$ 组。则 $4x + 3 \cdot 4x + 2 \cdot 12x = 1000$ ，解得， $x = 25$ ，所以一共 $4 \times 25 = 100$ 人是四胞胎。选 D。

第 14 题

考点：排列组合

解答：



由上图，格点表示整数点。其中，

① 1×1 正方形个数： $3+6+9+12=30$ 个。② 2×2 的正方形个数： $2+5+8=15$ 个。

③ 3×3 的正方形个数： $1+4=5$ 个。

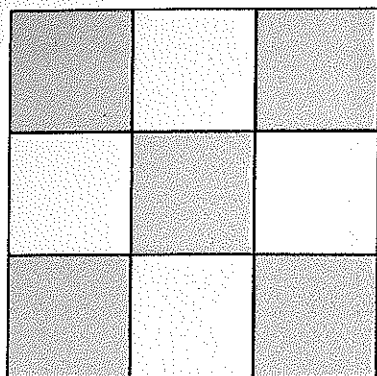
综上，共 $30+15+5=50$ 个，选 D。

第 15 题

考点：数论（奇偶性）

解答：因为连续的两个数共享同一条边，表明相邻两个方格内的数奇偶性不同。

因此如下图，方格用 2 种颜色表示，分别表示方格内的数字是奇数和偶数。



因为1到9中,有5个奇数,4个偶数,因此位于4个角落和中心的这5个方格内必为奇数,它们的和为 $1+3+5+7+9=25$,而因为4个角落的数字之和为18,因此中间方格的数字是7,选C。

第16题

考点: 数列(等比数列)

关键思路解析: 假设公比是 r ,那么 S 可以表达成关于 r 的函数,算出 S 的最小值即可。

解答: 设公比为 r ,则第一项是 $1/r$, $S = \frac{\frac{1}{r}}{1-r} = \frac{1}{r-r^2} \geq \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

Answer: E

第17题

考点: 不等式(AM-GM)

关键思路解析: 我们假定这6个面上的数字是 a, b, c, d, e, f ,其中 a, e 分别属于上下面,那么这8个乘积之和为:

$$\begin{aligned}
 &abe + bce + cde + dae + abf + bcf + cdf + daf \\
 &= (ab + bc + cd + da)(e + f) \\
 &= (a + c)(b + d)(e + f)
 \end{aligned}$$

并且已知 $a+b+c+d+e+f=2+3+4+5+6+7=27$. 此时, 我们想到运用 AM-GM 可以找到最大值.

解答: $(a+c)(b+d)(e+f) \leq \left(\frac{a+c+b+d+e+f}{3}\right)^3 = 9^3 = 729$, 等号成立时,

$$a+c=b+d=e+f=9.$$

Answer: D

第 18 题

考点: 数论 (不定方程, SFFT)

关键思路: 先根据题意列出方程, 再观察方程的特点.

解答: 假设这几个连续正整数中的第一个数是 x , 且一共有 n 个, 则

$$x+(x+1)+(x+2)+\dots=345, \text{ 即, } (2x+n-1)n=690=2\cdot3\cdot5\cdot23. \text{ 因此需要把等式右边}$$

写成 2 个不等正整数相乘, 且左大右小 (因为 $2x+n-1 > n$), 得,

$$(2x+n-1)n=115\cdot6$$

$$(2x+n-1)n=69\cdot10$$

$$(2x+n-1)n=46\cdot15$$

$$(2x+n-1)n=345\cdot2$$

$$(2x+n-1)n=230\cdot3$$

$$(2x+n-1)n=138\cdot5$$

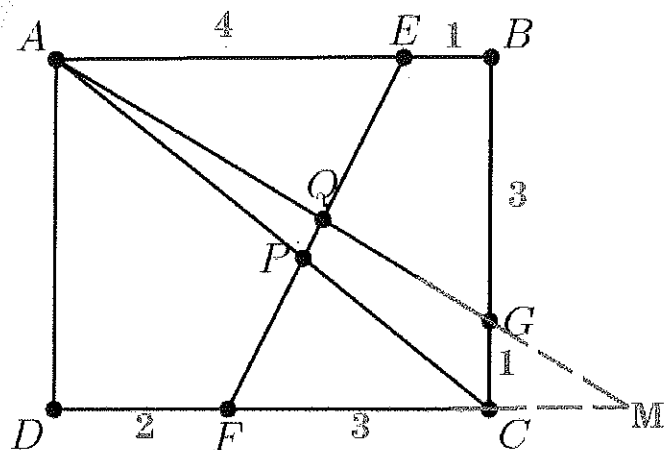
$$(2x+n-1)n=30\cdot23$$

上述每个方程都有整数解, 因此一共有 7 种方法, 选 E.

第 19 题

考点: 平面几何 (相似三角形)

解答:



延长 AG, DC 交于 M。 $\frac{AB}{CM} = \frac{BG}{GC} = \frac{3}{1}$, 则 $CM = \frac{AB}{3} = \frac{5}{3}$ 。 $\frac{EQ}{QF} = \frac{AE}{FM} = \frac{4}{3 + \frac{5}{3}} = \frac{6}{7}$,

所以 $EQ = \frac{6}{13}EF$ 。而 $\frac{EP}{PF} = \frac{AE}{FC} = \frac{4}{3}$, 所以 $\frac{EP}{PF} = \frac{AE}{FC} = \frac{4}{3}$, 则 $EP = \frac{4}{7}EF$ 。因此

$PQ = EP - EQ = \frac{4}{7}EF - \frac{6}{13}EF = \frac{10}{91}EF$, 所以 $\frac{PQ}{EF} = \frac{10}{91}$, 选 D。

第 20 题

考点: 平面几何 (几何变换)

关键思路解析: 我们需要先找到 center of dilation. 假设 center of dilation 的坐标为

(x, y) , 则由 $A(2, 2)$ 变到了 $A'(5, 6)$, 得到, $\frac{5-x}{2-x} = \frac{6-y}{2-y} = \frac{3}{2}$, 解得, $x=-4, y=-6$. 所以

位似中心为 $(-4, -6)$, scale factor 为 $3/2$. 那么 $O(0, 0)$ 假设被变到了点 $P(a, b)$, 则

$\frac{a+4}{4} = \frac{b+6}{6} = \frac{3}{2}$, $a=2, b=3$. 因此 P 的坐标为 $(2, 3)$, 那么 $PO = \sqrt{13}$.

Answer: C

第 21 题

考点: 代数 (数形结合)

关键思路解析:跟前面题目思路一样,需要画出方程所代表的图像.先分析对称性.

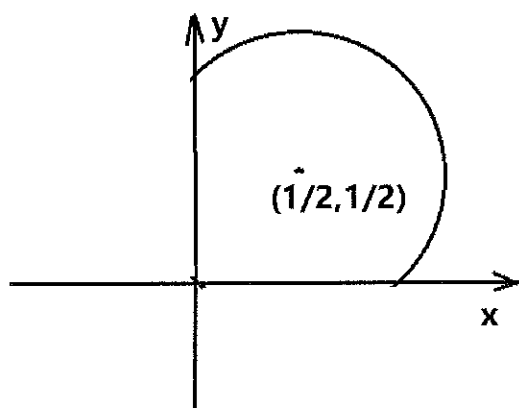
用 $-x$ 代替 x , 代入方程, 得到, $x^2 + y^2 = |x| + |y|$, 仍然满足原方程, 说明图像关于 y -轴对称.

用 $-y$ 代替 y , 代入方程, 得到, $x^2 + y^2 = |x| + |y|$, 仍然满足原方程,

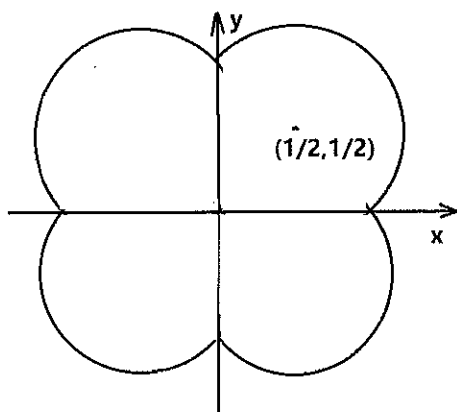
说明图像关于 x -轴对称. 所以我们只需要画出第一象限的图像. 那么方程变

为: $x^2 + y^2 = x + y$, 即, $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. 这是一个圆心为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 半径为

$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆在第一象限的部分, 如下图.



然后根据对称性, 补出其他三个象限的图像. 所以整个图像如下图所示.



整个面积是第一象限面积的4倍.第一象限的面积可以看成是一个半圆面积加一个腰长为1的等腰直角三角形面积,即, $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. 所以整个图形的面积是 $2 + \pi$.

Answer : B

第 22 题

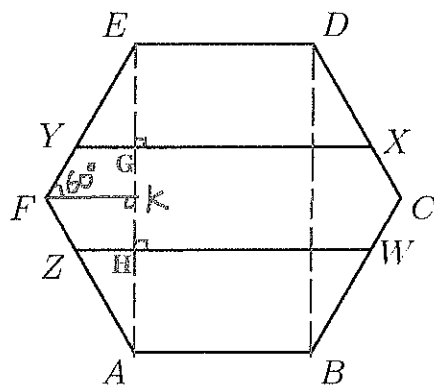
考点: 排列组合

解答: 任意选3支队伍, 结果只可能2种: 每支队伍赢一次, 输一次; 或者有支队伍赢2次(这是反面情况)。因此我们只需要将所有3支队伍的组合, 减去反面情况即可。因为有21支队伍, 所有选择3支队伍有 $C_{21}^3 = 1330$ 种方法。对于每支队伍M, 它打败另外2支队伍共有 $C_{10}^2 = 45$ 种方法, 而M这支队伍共有21种选法, 因此反面情况共 $21 \times 45 = 945$ 种。那么符合题目要求的3支队伍的组合数是: $1330 - 945 = 385$ 种, 选A。

第 23 题

考点: 平面几何(特殊直角三角形)

解答:



连接 EA, DB。过 F 作 $FK \perp EA$ 。设正六边形边长为 2。因为在直角 $\triangle FEK$ 中,

$EF=2$, $\angle EFK=60^\circ$, 所以 $EK=\sqrt{3}$, $EA=2\sqrt{3}$, 那么 $EG=\frac{1}{3}EA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。所以

$YG=\frac{EG}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$, $YX=2 \cdot YG+ED=\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$ 。因此梯形 EDXY 的面积为

$S_{EDXY}=\frac{\left(2+\frac{10}{3}\right) \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{16\sqrt{3}}{9}$, $S_{ABWZ}=S_{EDXY}=\frac{16\sqrt{3}}{9}$ 。而六边形 ABCDEF 的面

积为 $S_{ABCDEF}=6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2=6\sqrt{3}$, 所以六边形 WCXYFZ 的面积为

$S_{WCXYFZ}=6\sqrt{3}-2 \times \frac{16\sqrt{3}}{9}=\frac{22\sqrt{3}}{9}$, 那么 $\frac{S_{WCXYFZ}}{S_{ABCDEF}}=\frac{\frac{22\sqrt{3}}{9}}{6\sqrt{3}}=\frac{11}{27}$, 选 C。

第 24 题

考点: 排列组合 (分类讨论)

解答: 因为 $ab < bc < cd$ 形成一个递增的等差数列, 则 $10a+b+10c+d=2(10b+c)$,

即 $10(a+c-2b)=2c-(b+d)$, 且 $c \geq b \geq a > 0$ (等号不能同时取到)。

方程表明 $2c-(b+d)$ 是 10 的倍数, 因为 b, c, d 均为 0~9 的数字, 则 $2c-(b+d)$ 只

可能是 -10, 0, 10。但 $2c-(b+d)=(c-b)+(c-d) \geq 0+(-8) \geq -8$ 取不到 -10, 因此只可

能是 $2c-(b+d)=0$ 或 $2c-(b+d)=10$, 下面分类讨论。

①

$$\begin{cases} 2c-(b+d)=0 \\ a+c-2b=0 \\ c \geq b \geq a > 0 \end{cases}$$

由第二个方程知, c, b, a 成等差数列, 根据它们的公差的取值, 列出下面所有可能。

c	b	a	$d=2c-b$
9	8	7	10
(公差为 1) 8	7	6	9
7	6	5	8
6	5	4	7
5	4	3	6
4	3	2	2
3	2	1	4
(公差为 2) 9	7	5	11
8	6	4	10
7	5	3	9
6	4	2	8
5	3	1	7
(公差为 3) 9	6	3	12
8	5	2	11
7	4	1	10
(公差为 4) 9	5	1	13

可以看到,使得 d 在 0 到 9 之间的有 9 种。因此符合要求的有 9 种。

②

$$\begin{cases} 2c - (b + d) = 10 \\ a + c - 2b = 1 \\ c \geq b \geq a > 0 \end{cases}$$

(i) 若 $c=9$, 则 $b+d=8$, $a=2b-8$. 因此 b, d, a 的值列表如下:

b	d	a
8	0	8
7	1	6
6	2	4
5	3	2

共 4 种。

(ii) 若 $c=8$, 则 $b+d=6$, $a=2b-7$. 因此 b, d, a 的值列表如下:

b	d	a
6	0	5
5	1	3
4	2	1

共 3 种

(iii) 若 $c=7$, 则 $b+d=4$, $a=2b-6$. 因此 b, d, a 的值列表如下:

b	d	a
---	---	---

4	0	1
---	---	---

共 1 种。

(iv)若 $c=6$, 则 $b+d=2$, $a=2b-5$. 因此 b, d, a 的值列表如下:

b	d	a
2	0	-1

共 0 种。当 c 取值小于 6, 无需考虑。

因此第②种情况共 $4+3+1=8$ 种。

综上, 符合要求的四位数 $abcd$ 共有 $9+8=17$ 种, 选 D。

第 25 题

考点: 数论 (欧拉函数) (关于欧拉函数在 AMC10/12 教材里有讲解)

关键思路分析: 先对 $f(x)$ 进行化简.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=2}^{10} (\lfloor kx \rfloor - k \lfloor x \rfloor) = \sum_{k=2}^{10} (\lfloor k \lfloor x \rfloor + k \{x\} \rfloor - k \lfloor x \rfloor) \\
 &= \sum_{k=2}^{10} (\lfloor k \{x\} \rfloor) \\
 &= \lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 3\{x\} \rfloor + \lfloor 4\{x\} \rfloor + \dots + \lfloor 10\{x\} \rfloor
 \end{aligned}$$

我们观察到, 对于 $\lfloor k\{x\} \rfloor$, 只有当 $\{x\}$ 经过 $1/k, 2/k, 3/k, \dots, k-1/k$ 时, $\lfloor k\{x\} \rfloor$ 的值才会发生改变, 获取不同的值. 而经过 $2/4, 4/8$ 和经过 $1/2$ 是同一个值, 所以表现在 $f(x)$ 上是其值增加 3, 只改变一次. 所以下面看当 $\{x\}$ 从 0 变到 1 (取不到 1) 的过程中, $f(x)$ 的值改变多少次, 就是取多少个不同的值. 而使得 $\lfloor k\{x\} \rfloor$ 值发生改变的节点 $\{x\}$ 的取值是 $n/k (1 \leq n < k)$, 需要 n 与 k 互质, 即找 $\varphi(k)$.

解答:首先 $x=0$ 时, $f(x)$ 会有一个值.

$$\varphi(2)=1, \varphi(3)=2, \varphi(4)=2, \varphi(5)=4, \varphi(6)=2, \varphi(7)=6, \varphi(8)=4, \varphi(9)=6, \varphi(10)=4.$$

所以 $f(x)$ 一共有 $1+1+2+2+4+2+6+4+6+4=32$ 个.

Answer: A