

2017 AMC 10 A 解答

第1题

考点：算术

解答：注意到这是个递推数列的第6项 a_6 。因为 $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 1$ 。所以

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7.$$

$$a_3 = 7 \cdot 2 + 1 = 15.$$

$$a_4 = 15 \cdot 2 + 1 = 31.$$

$$a_5 = 31 \cdot 2 + 1 = 63.$$

因此： $a_6 = 63 \cdot 2 + 1 = \boxed{(C) 127}$

第2题

考点：算术

解答：一盒5根棒冰可以买2盒，一盒3根棒冰可以买1盒，钱恰好全部用完。

因此最多可以买 $10+3=13$ 根。选 D。

第3题

考点：平面几何

解答：花园的长宽分别为15英尺和10英尺。因此花园的总面积为150平方英尺。

而花床的总面积为 $6 \times 6 \times 2 = 72$ 平方英尺。因此走道的总面积为 $150 - 72 = 78$ 平方英尺，

选 B。

第4题

考点：算术

解答：30秒内，实际进入盒子里的玩具只有1个，因此当27个玩具都进入盒子时，总共花了 $30 \times 27 = 810$ 秒。最后30秒，30个玩具都进入盒子。因此需要840秒，合14分钟，选B。

第5题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：令这2个实数为 x, y ，已知 $x + y = 4xy$ ，两边除以 xy ，得， $\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = 4$ 。

$$\text{即 } \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \boxed{(C) 4}.$$

第6题

考点：逻辑推理

解答：和这句话“做对所有的选择题，此次考试就能得到一个A”在逻辑上等价的逆否命题是：“如果这次考试没有得到A，则没有做对所有的选择题”。而没有做对所有的选择题等价于至少有一道选择题是错误的。因此选B。

第7题

考点：平面几何（勾股定理）

解答：假设正方形边长为1，则Jerry总共走的长度为2；Silvia总共走的长度为 $\sqrt{2}$ ，

所以Silvia比Jerry少走 $\frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 30\%$ ，选A。

第 8 题

考点：排列组合

解答：握手都发生在这 10 人和 20 人之间，以及 10 人相互之间。这 10 人每个人都和 20 人握手 20 次，一共握手 200 次；这 10 人相互间，任选 2 人需要握手一次，一共握手 $C_{10}^2 = 45$ 次，所以一共握手 245 次，选 B。

第 9 题

考点：算术

解答：Minnie 总共花了 $\left(\frac{10}{5} + \frac{15}{30} + \frac{20}{20}\right) \cdot 60 = 210$ 分钟。Penny 总共花了

$\left(\frac{10}{40} + \frac{15}{10} + \frac{20}{30}\right) \cdot 60 = 15 + 90 + 40 = 145$ 分钟。因此 Minnie 比 Penny 多花了 65 分钟，

选 C。

第 10 题

考点：平面几何（三角形内的不等式）

解答：三角形内的不等关系同样可以用于四边形： $x < 3 + 7 + 15$ 且

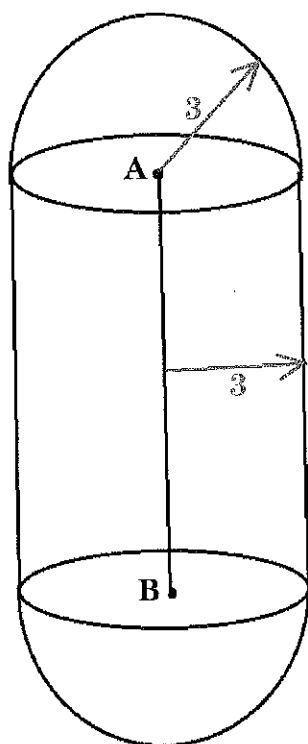
$15 < x + 3 + 7$ ，得到， $5 < x < 25$ 。而在 5 到 25 之间有 19 个正整数，扣除

7 和 15 这 2 个（因为已经用过），所以可选的有 $19 - 2 = \boxed{(B) 17}$ 根。

第 11 题

考点：立体几何

解答:



这些点所形成的空间区域如上图所示, 两端是半径为 3 的半球, 中间是一段高为 AB 的圆柱。所以总体积为 $V = \frac{4\pi}{3} \cdot 3^3 + \pi \cdot 3^2 \cdot AB = 216\pi$, 解得, $AB = 20$, 选 D。

第 12 题

考点: 代数 (数形结合)

解答: 分 3 种情况讨论:

① $\begin{cases} 3 = x + 2 \\ y - 4 \leq 3 \end{cases}$, 解得, $\begin{cases} x = 1 \\ y \leq 7 \end{cases}$, 这是直线 $x = 1$ 在点 $(1, 7)$ 以下的部分, 即一条射线。

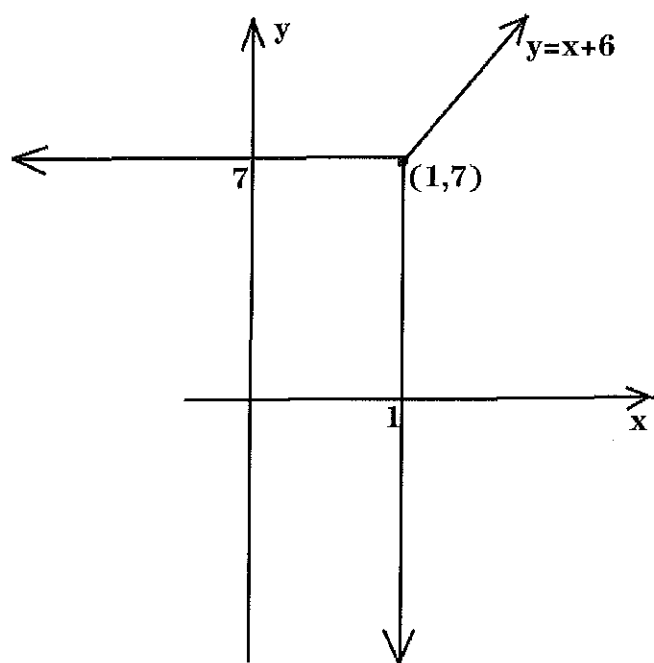
② $\begin{cases} 3 = y - 4 \\ x + 2 \leq 3 \end{cases}$, 解得, $\begin{cases} x \leq 1 \\ y = 7 \end{cases}$, 这是直线 $y = 7$ 在点 $(1, 7)$ 左边的部分, 即一条射

线。

③ $\begin{cases} x+2=y-4 \\ 3 \leq x+2 \end{cases}$ ，解得， $\begin{cases} y=x+6 \\ x \geq 1 \end{cases}$ ，这是直线 $y=x+6$ 在点 $(1,7)$ 右边的部分，

即一条射线。

上面三条线画在同一张图上，如下图：



因此选 E。

第 13 题

考点：数列（周期数列）

解答：我们先写出前几项看是否存在周期性：0,1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,2,0,2,2,1,0, ...

可以看到，从第 9 项开始重复前面的数字，因此周期为 8. $2017 \equiv 1(\text{mod } 8)$ ，因此

$F_{2017} = F_1 = 0$ ，从第 2017 项开始的后面 8 项即为数列的前 8 项，它们的和为

$0+1+1+2+0+2+2+1=9$ ，选 D。

第 14 题

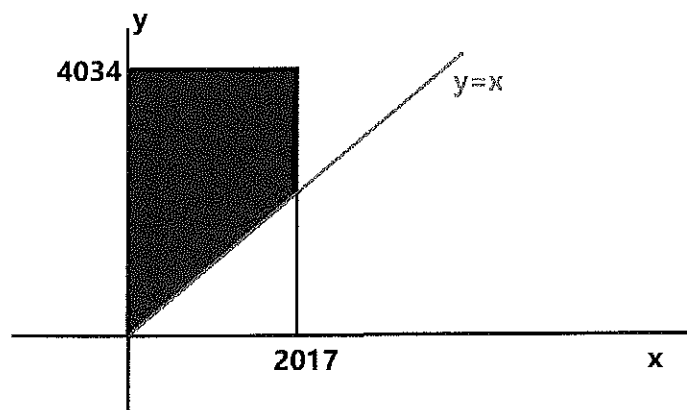
考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设苏打水是 x 美元，则电影票价格是 $20\%(A-x)$ 。而因为苏打水的价格是 A 与电影票价格之差的 5% ，所以 $x = 5\% \cdot [A - 0.2(A-x)]$ ，解得， $x = \frac{4}{99}A$ 。
而电影票价格为 $20\%(A-x) = \frac{19}{99}A$ ，所以电影票和苏打水的总价为 $\frac{23}{99}A \approx 23\% \cdot A$ ，
选 D。

第 15 题

考点：概率（几何概型）

关键思路解析：这是个几何概型(geometric probability)因为变量是连续取值的。假设 Chloe 选的数是 x ，Laurent 选的数是 y ，那么 x 和 y 的所有可能值组成的点对 (x, y) 形成一个矩形区域，如下：



y 比 x 大的区域在 $y=x$ 的上方，所以概率为

$$P = \frac{4034 \times 2017 - \frac{1}{2} \times 2017 \times 2017}{4034 \times 2017} = \frac{3}{4}$$

Answer : C

第 16 题

考点：数论（最小公倍数）

关键思路分析：经过 S 分钟后，这 10 匹马又同时到达起跑线，说明这 S 分钟内，每匹马都走了整数圈。意味着 S 是每匹马一圈所花时间的倍数，那么 S 即是它们的公倍数。而题目中要求的其中至少 5 匹马的最小公倍数。

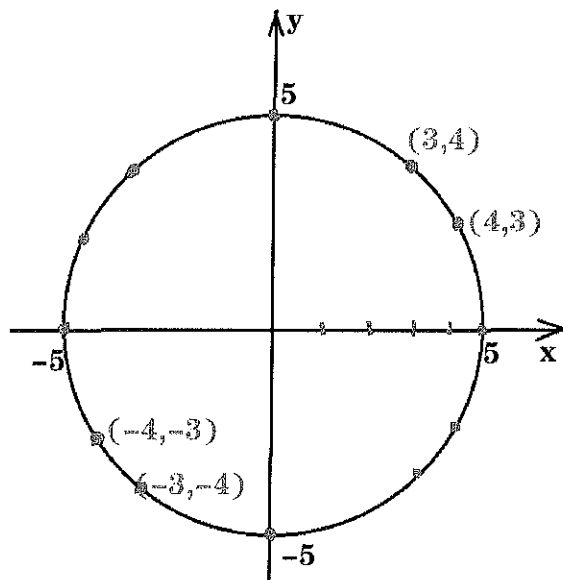
解答：要求至少 5 匹马的最小公倍数，首先从 $1, 2, 3, \dots, 10$ 中选择 5 匹马，求出这 5 匹马的最小公倍数，它们组成一个集合(set)，我们需要的是这个集合里最小的元素(element)。当选择 $1, 2, 3, 4, 6$ 时，所得的最小公倍数最小为 12。

Answer : B

第 17 题

考点：平面几何（距离公式）

解答：



圆上的整数点如上图所示。要使得 $\frac{PQ}{RS}$ 的比值最大，则应该使得 PQ 最大，而 RS 最小。由图可见，最小的 RS 显然是点 $(3,4)$ 和 $(4,3)$ 的距离，即 $\sqrt{2}$ 。要求的 PQ 的

最大值,分2种情况:若P在点(0,5),Q在圆上滑动时,当Q位于点(-3,-4)时,PQ长度最长且是个无理数,此时 $PQ = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$;若P在点(3,4),Q在圆上滑动时,当Q位于点(-4,-3)或(-3,-4)时,可使PQ最长,此时PQ长度分别为 $\sqrt{98}$ 或10.只有 $\sqrt{98}$ 是无理数.因此PQ最大值为 $\sqrt{98}$.那么 $\frac{PQ}{RS}$ 的最大比值为 $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = 7$,选D。

第18题

考点:概率(分类讨论)

解答:如果W表示选手赢,L表示选手输,则Amelia赢得比赛的可能结果是:

W或LLW,或LLLLW或LLLLLLW,...

因此概率为

$$P = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{9}$$

因此 $q-p=9-5=4$.选D。

第19题

考点:排列组合(插空法或其他)

关键思路解析:这里有多多个不能相邻的条件:A和B、C不能相邻,D和E不能相邻.对于这种情况,我们可以把D和E不能相邻作为主条件.先去安排A、B、C.然后把D、E插入空位.

解答:

首先, 安排 A、B、C. 然后把 D 和 E 放入这 3 人形成的空位中.

安排 A、B、C, 取决于 A 到底在 BC 之间, BC 左边还是 BC 右边, 主要有 3 种结构: A,B,C, 或 B,A,C, 或 B,C,A.

1. 对于 A、B、C, B 和 C 可以交换他俩的位置, 2 种可能. 然后把 D 和 E 放入形成的 3 个空位中. 因为 A 和 B 不能相邻, 所以 A 和 B 之间的空位一定要被 D 或者 E 占位, 有 2 种可能. 剩下的一人还有 3 个空位可占, 有 3 种可能. 所以总共 $2 \times 2 \times 3 = 12$ 种可能.

2. 对于第二种情况, B、A、C, A 在中间, BC 在两边可以相互交换位置, 有 2 种方法. 确定 BAC 相对位置后, 我们再把 D 和 E 放入 4 个空位中. 因为 A 不能和 BC 相邻, 所以 A 和 BC 形成的 2 个空位一定要被 D、E 占位, 占位方式有 2 种. 所以这种情况总共有 $2 \times 2 = 4$ 种可能性.

3. 对于第三种情况, A 在 BC 和右边, 这和第一种情况类似, 也有 12 种可能.

综上, 3 种情况总共 $12 + 4 + 12 = 28$ 种可能.

Answer : C

第 20 题

考点: 数论 (整除)

关键思路解析: 因为这里 $S(n)$ 表示各个位上的数字之和, 而一个数模 9 的余数等于它所有位上数字之和模 9 的余数, 所以想到模 9 或者模 3. 这里选择模 9, 因为模 9 后可能性更少.

解答: $n \equiv S(n) = 1274 \equiv 5 \pmod{9}$, 所以 $S(n+1) \equiv n+1 \equiv 6 \pmod{9}$, 只有选项 D

符合题意.

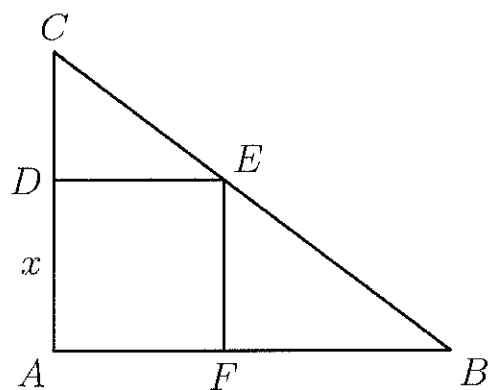
Answer: D

第 21 题

考点: 平面几何 (相似三角形)

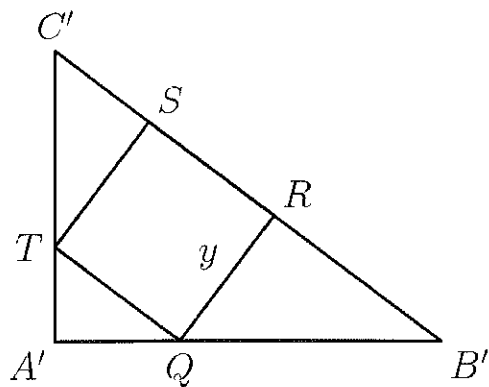
解答:

先分析第一个三角形:



注意到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FBE$ 相似, 所以 $\frac{BF}{FE} = \frac{AB}{AC}$. 即 $\frac{4-x}{x} = \frac{4}{3}$, 解得, $x = \frac{12}{7}$.

接下来分析第二个三角形:



类似的, $\triangle A'B'C'$ 相似于 $\triangle RB'Q$, 因此 $RB' = \frac{4}{3}y$ 。由 $\triangle A'B'C'$ 相似于

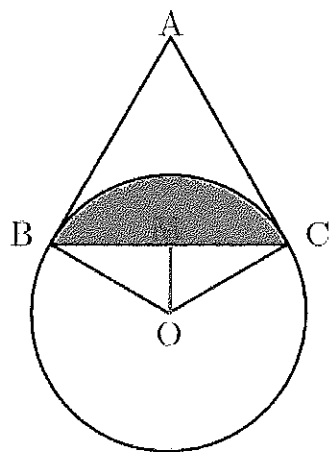
$\triangle STC'$, 可以求得 $C'S = \frac{3}{4}y$ 。因此,

$$C'B' = C'S + SR + RB' = \frac{4}{3}y + y + \frac{3}{4}y = 5, \text{ 解得, } y = \frac{60}{37}. \text{ 那}$$

$$\text{么, } \frac{x}{y} = \boxed{(D) \frac{37}{35}}.$$

第 22 题

考点: 平面几何



关键思路解析: 因为我们只要求出比例(ratio), 所以不妨假设等边三角形 ABC 的边长为 1, 在这样的条件下, 只要求出下图中阴影部分的面积即可. 这个面积可以看成是扇形面积减去三角形 BOC 的面积. 因为 AB, AC 均为切线, 所以 $\angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$, 因此 $\angle BOC = 120^\circ$. 知道了圆心角的大小后, 扇形面积和三角形 BOC 面积也就水到渠成了.

解答: 在等腰三角形 BOC 中, 过顶点 O 作 $OM \perp BC$, 则 M 为 BC 中点, $BM = 1/2$,

因为 $\angle BOM = 60^\circ$, 所以 $BO = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{12}$. 而扇形

OBC 的面积为: $\frac{1}{3} \pi \cdot BO^2 = \frac{\pi}{9}$. 那么阴影部分面积为 $\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{12}$, 而整个等边三角形面

积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 那么阴影部分面积占了整个正三角形面积的:

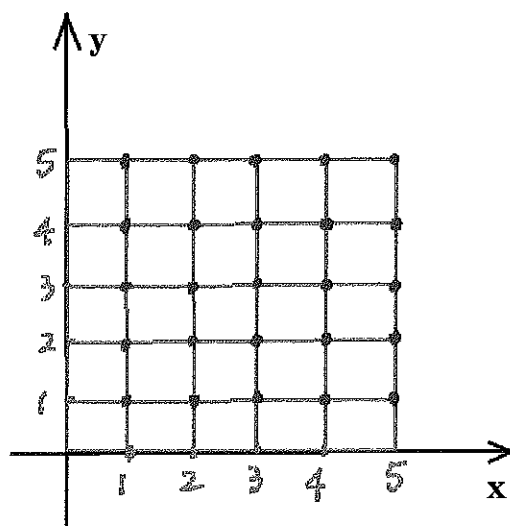
$$\frac{\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \left(\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27} - \frac{1}{3}, \text{ 那么圆外部分占整个正三角形的: } \frac{4}{3} - \frac{4\sqrt{3}\pi}{27},$$

选 E。

第 23 题

考点: 排列组合

解答:

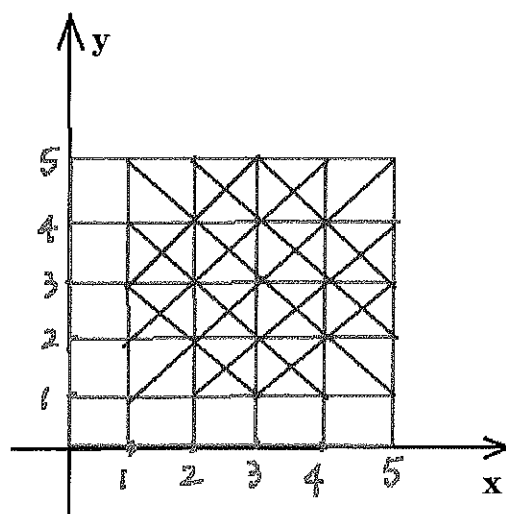


所有可选的点如上图 25 个点。首先从这 25 个点中选择 3 个点作为三角形的顶点,

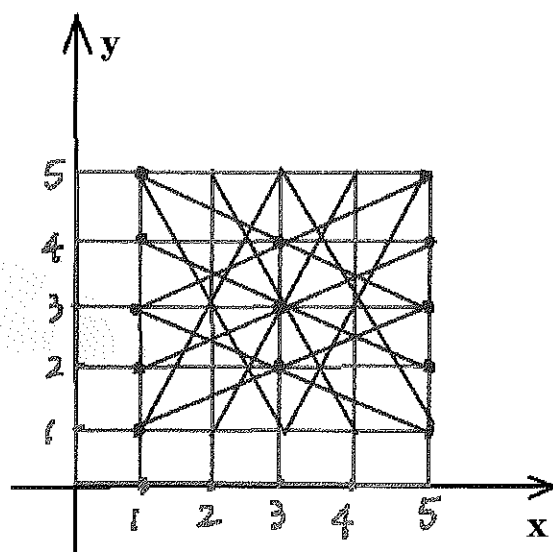
共 $C_{25}^3 = \frac{25 \times 24 \times 23}{6} = 2300$ 种可能性。但其中有些情况的三个点位于同一直线上，无法组成三角形。

①若所选的 3 个顶点位于同一行或者同一列。一共有 $10 \cdot C_5^3 = 100$ 种。

②若所选的 3 个顶点为如下图所示的某一条直线上，也都不能组成三角形。共有 $(2 \cdot C_3^3 + 2 \cdot C_4^3 + C_5^3) \cdot 2 = 40$ 种。



③若所选的 3 个顶点为如下图所示的某一条直线上，也都不能组成三角形。从图中数出来，共有 12 种。



因此共可以形成 $2300 - (100 + 40 + 12) = 2148$ 个三角形, 选 B。

第 24 题

考点: 多项式

关键思路解析: 因为 $f(1) = 1 + 1 + b + 100 + c$, 即要求 b 和 c 的值. 因为 $g(x)$ 的每一个根也是 $f(x)$ 的根, 所以 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因子. 那么 $f(x) = g(x)(x + d)$, 之后展开后系数一一对应即可求出系数.

解答:

$$f(x) = g(x)(x + d), \text{ 即}$$

$$x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c = (x^3 + ax^2 + x + 10)(x + d) = x^4 + (d + a)x^3 + (ad + 1)x^2 + (d + 10)x + 10d$$

$$\text{所以, } \begin{cases} d + a = 1 \\ ad + 1 = b \\ d + 10 = 100 \\ 10d = c \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} a = -89 \\ b = -8009 \\ c = 900 \\ d = 90 \end{cases}, f(1) = 1 + 1 + b + 100 + c = -7007$$

Answer: C

第 25 题

考点: 排列组合+数论(被 11 整除的规则)

解析: 大致思路应该是: 先找出 100 到 999 之间所有 11 的倍数, 然后再对每个数的三个数字进行排列, 得到所有可能的结果. 不过我们需要对这些数进行分类, 因为不同的 3 个数字, 排列结果不同. 分: ①若三个数字有一个为 0, 另外 2 个数字相同或不同 ②三个数字均不等于 0, 但其中 2 个数字相同 ③三个数字均不等于 0, 且均不同。

解答: 11 的倍数中,

①若 3 个数字有一个为 0, 则分为 $ab0$ 型或 $a0b$ 型。若是 $ab0$ 型, 则 $a+0-b=0$,

$a=b$, 因为 $a=b=1$ 到 9 均可取值, 所以共 9 个 11 的倍数, 它们是

110, 220, 330, 440, ..., 990. 每个数的三个数字排列可以形成 2 个不同的三位数, 因

此可以形成 18 个符合要求的三位数; 若是 $a0b$ 型, 则 $a+b-0=11$, $a+b=11$,

$(a,b)=(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3),(9,2)$, 共有 8 个三位数是 11 的倍数。

要考虑它们的三个数字重新排列形成的不同三位数的个数, 我们只需考虑

209, 308, 407, 506 即可, 它们中的每个数的 3 位数字重新排列可以形成 4 个不同的

三位数, 因此总共可以形成 $4 \times 4 = 16$ 个不同的符合要求的三位数。

②若 3 个数字均不为 0, 且其中有 2 个数字相同。若是 aab 型, 则 $a+b-a=11$ 或

0, 即 $b=11$ 或 0, 不可能; 若是 baa 型, 则 $a+b-a=11$ 或 0, 即 $b=11$ 或 0, 不

可能; 若是 aba 型, 则 $a+a-b=11$ 或 0, 即 $2a-b=11$ 或 0。对于 $2a-b=11$, 则

$(a,b)=(6,1),(7,3),(8,5),(9,7)$ 。对于 $2a-b=0, b=2a$, $(a,b)=(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)$ 。因

此 aba 型 11 的倍数共 8 个, 每个数的三个数字重新排列可形成 3 个不同的三位

数, 因此共可以形成 $8 \times 3 = 24$ 个不同的三位数。

③若 3 个数字均不为 0, 且均不同。即把所有 11 的倍数的个数, 减去前 2 种。

100 到 999 中, 11 的倍数为 $11 \times 10, 11 \times 11, 11 \times 12, \dots, 11 \times 90$ 共 81 个, 而前 2 种共有

$9+8+8=25$ 个, 所以三个数字均不同的 11 的倍数共有 $81-25=56$ 个。注意到这 56

个三位数中, 每个三位数 abc , 若将数字 a 和 c 交换, 变成 cba , 则仍然是 11 的倍

数。说明 abc 和 cba 均在这 56 个数之中, 且它们的三个数字各自重新排列结果

是重复的! 意味着我们只需要计算其中一半, 即 28 个三位数的三个数字重新排

列的结果。因为每个可以重排形成 $3!=6$ 个不同的三位数，因此共形成 $28 \times 6 = 168$ 个不同的符合要求的三位数。

综上，总共有 $18+16+24+168=226$ 个具有这样性质的三位数，选 A。