

2017 AMC 10 B 解答

第1题

考点：逻辑推理

解答：我们可以逆推。因为交换两位数的位置后得到一个71和75之间的数，则交换前，可能是17,27,37,47,57 其中一个。减去11后，分别为6,16,26,36,46，其中是3的倍数的只有6和36.除以3后分别为2和12.只有12是个两位数，因此原来的数是12.选B。

第2题

考点：算术

解答：Sofia 跑5圈总耗时： $5 \cdot \left(\frac{100}{4} + \frac{300}{5} \right) = 5 \cdot 85 = 425$ 秒，合7分钟5秒，选C。

第3题

考点：代数（不等式）

解答：对于选项A，若 x 取接近0的很小的正数，而 y 取值接近-1，那么 $y+x^2$ 是个负数，不对；对于选项B，若 x 取接近0的很小的正数，而 y 取值接近-1，那么 $y+xz$ 也是个负数，不对；对于选项C，若取 $y=-\frac{1}{2}$ ，则 $y^2+y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}<0$ 是个负数；对于D，若取 $y=-\frac{1}{4}$ ，则 $2y^2+y=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}<0$ ，是个负数；对于E，因为 $y>-1, z>1$ ，相加得， $y+z>0$ 是个正数，选E。

第4题

考点：代数（整体代入）

解答：对方程 $\frac{3x+y}{x-3y} = -2$ 化简得， $3x+y = -2x+6y$ ，则 $5x = 5y \implies x = y$ 。

代入 $\frac{x+3y}{3x-y}$ ，得， $\frac{x+3x}{3x-x} = \frac{4x}{2x} = \boxed{(D) 2}$ 。

第5题

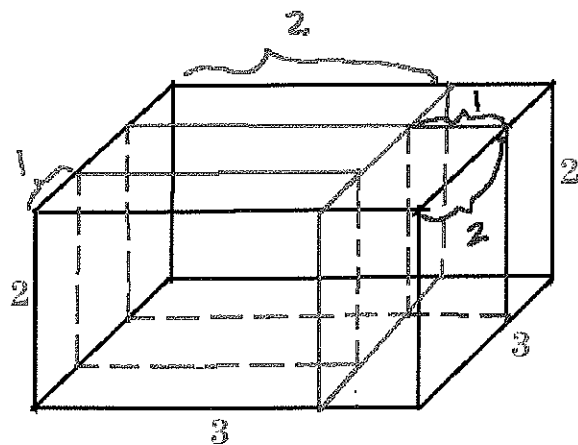
考点：代数（列方程解应用题）

解答：设原来有樱桃味 x 块，蓝莓味 $2x$ 块，由题意， $2x-10=3(x-10)$ ，解得， $x=20$ ，所以蓝莓味原来有 $2x=40$ 块，选 D。

第6题

考点：立体几何

解答：盒子的体积是 18 平方英寸，而一个方块的体积为 4 平方英寸。 $18 \div 4 = 4.5$ ，因此最多放 4 块。具体放置方法如下：



第7题

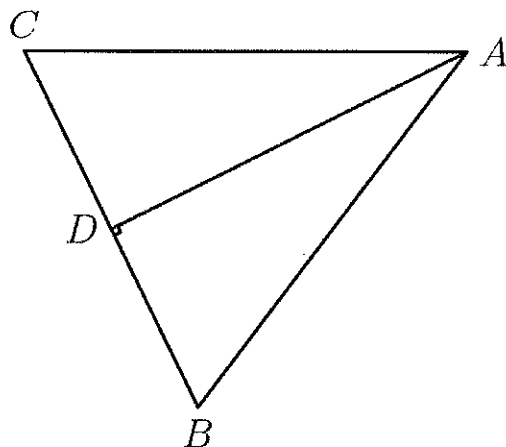
考点：代数（列方程解应用题）

解答：设 Samia 步行了 x 公里，则 $\frac{x}{17} + \frac{x}{5} = \frac{44}{60}$ ，解得， $x = \frac{17}{6} \approx 2.8$ ，选 C。

第8题

考点：解析几何（中点公式）

解答：



因为 $AB = AC$ ，那么 $\triangle ABC$ 是个等腰三角形，所以 D 为 BC 的中点。设

$C(x, y)$ ，则由中点公式，
$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = -1 \\ \frac{y-3}{2} = 3 \end{cases}$$
，解得， $\begin{cases} x = -4 \\ y = 9 \end{cases}$ ，因此 $C(-4, 9)$ ，选 C。

第9题

考点：概率

解答：做对一道选择题的概率为 $\frac{1}{3}$ ，做错的概率为 $\frac{2}{3}$ 。做对两道选择题的概率为

$C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}$, 做对三道选择题的概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, 因此赢得测试的概率为 $\frac{7}{27}$, 选 D。

第 10 题

考点: 解析几何

解答: 这两条直线写成点斜式分别为 $y = \frac{a}{2}x - \frac{1}{2}c$ 和 $y = -\frac{2}{b}x - \frac{c}{b}$ 。可以看到

斜率分别为 $\frac{a}{2}$ 和 $-\frac{2}{b}$ 。因为直线垂直, 所以 $\frac{a}{2} = -\frac{1}{-\frac{2}{b}}$, 化简得, $a = b$ 。

因为点 $(1, -5)$ 在两条直线上, 因此 $a \times 1 - 2 \times -5 = c$ 以及

$2 \times 1 + b \times -5 = -c$ 。因为 $a = b$, 则这 2 个方程化简为 $a + 10 = c$ 和

$2 - 5a = -c$ 。解这个方程组得, $c = \boxed{\text{(E)} 13}$ 。

第 11 题

考点: 百分数

解答: 假设 Typico 高中共 100 人, 则有 60 人喜欢跳舞, 这其中说不喜欢跳舞的人有 $60 \times 20\% = 12$ 人; 有 40 人不喜欢跳舞, 这其中说不喜欢跳舞的人有 $40 \times 90\% = 36$ 人。因此共有 $12 + 36 = 48$ 人说自己不喜欢跳舞, 实际上喜欢跳舞的人有 12 人, 占了 $\frac{12}{48} = 25\%$, 选 D。

第 12 题

考点：百分数

解答：假设旧车每升汽油可以开 x 公里，那么新车每升柴油可以开 $1.5x$ 公里。

设汽油价格为每升 y 元，那么柴油价格为每升 $1.2y$ 元。那么旧车开 x 公里花费 y

元，而新车开 $1.5x$ 公里花费 $1.2y$ 元。所以开 1 公里，旧车花费 $\frac{y}{x}$ 元，新车花费

$\frac{1.2y}{1.5x} = \frac{0.8y}{x}$ ，新车比旧车省钱 $\frac{1-0.8}{1} = 20\%$ ，选 A。

第 13 题

考点：文氏图

关键思路解析：假设上瑜伽、桥牌和绘画的人的集合分别为 A, B, C 。因为班上总人数

为 20 人，所以 $|A \cup B \cup C| = 20$ 。因为参加瑜伽的人有 10 人，所以 $|A| = 10$ 。因为参

加桥牌的有 13 人，所以 $|B| = 13$ 。因为参加绘画的有 9 人，所以 $|C| = 9$ 。因为参加

至少两门课的有 9 人，所以 $|A \cap B| \cup |A \cap C| \cup |B \cap C| = 9$ 。而由容斥原理， $|A \cap B| \cup$

$|A \cap C| \cup |B \cap C| = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C|$ 。代入下式，

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$ ，即，

$20 = 10 + 13 + 9 - (9 + 2|A \cap B \cap C|) + |A \cap B \cap C| = 23 - |A \cap B \cap C|$ ，得到，

$|A \cap B \cap C| = 3$ 。

Answer: C

第 14 题

考点：概率

关键思路分析: 要找到满足条件的数字 N , 因为 N 模 5 的余数只能是 0, 1, 2, 3, 4, 可以把这 5 种情况都试一下, 看哪些情况是满足题意的.

解答: 因为

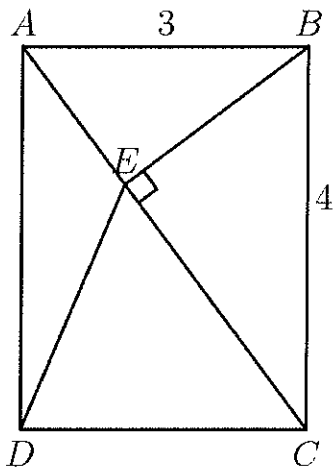
$$\begin{aligned} N \equiv 0(\text{mod } 5) & \quad N^{16} \equiv 0(\text{mod } 5) \\ N \equiv 1(\text{mod } 5) & \quad N^{16} \equiv 1(\text{mod } 5) \\ N \equiv 2(\text{mod } 5), \text{ therefore, } N^2 \equiv -1(\text{mod } 5) \rightarrow N^{16} \equiv 1(\text{mod } 5) & , \\ N \equiv 3(\text{mod } 5) & \quad N^2 \equiv -1(\text{mod } 5) \rightarrow N^{16} \equiv 1(\text{mod } 5) \\ N \equiv 4(\text{mod } 5) & \quad N \equiv 4 \equiv -1(\text{mod } 5) \rightarrow N^{16} \equiv 1(\text{mod } 5) \end{aligned}$$

我们可看到, 只有 N 是 5 的倍数时不符合要求. 因为当 $1 \leq N \leq 2020$, 共有 404 个 5 的倍数, 因此 N 不满足要求的概率为 $404/2020 = 1/5$, 因而 N 满足题目要求的概率为 $4/5$. 选 D.

第 15 题

考点: 平面几何

解答:



因为 $AE = 3 \cdot \cos \angle BAE = 3 \cdot \frac{AB}{AC} = 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$, 所以 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AE}{AC} = \frac{\frac{9}{5}}{5} = \frac{9}{25}$, 则

$$S_{\triangle ADE} = \frac{9}{25} S_{\triangle ACD} = \frac{9}{25} \cdot 6 = \frac{54}{25}, \text{ 选 E.}$$

第 16 题

考点：排列组合（考虑反面）

解答：先考虑反面，即不含有数字 0。所有不含 0 的一位数有 9 个，所有不含 0 的两位数有 $9 \times 9 = 81$ 个，所有不含 0 的三位数有 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 个。所有不含 0 的小于等于 2017 的四位数有 $1 \times 9 \times 9 \times 9 = 729$ 个。因此不超过 2017 的所有不含 0 的数总共有 $9 + 81 + 729 \times 2 = 9 + 1458 = 1548$ 个。而不超过 2017 的正整数共 2017 个，因此含有 0 的正整数有 $2017 - 1548 = 469$ 个，选 A。

第 17 题

考点：排列组合（升数，降数）（在 AMC10,12 教材里有具体讲解）

关键思路解析：这道题可以直接用前面关于升数和降数的结论： n 位升数一共有 C_9^n 个， n 位降数一共有 C_{10}^n 个。不过这里没有给定数的位数，所以对数的位数进行分类讨论。

解答：

1. 如果是 1 位数，那么有 1 到 9 共 9 个数： C_9^1
2. 如果是 2 位数，那么升数个数为： C_9^2 ，降数个数为： C_{10}^2
3. 如果是 3 位数，那么升数个数为： C_9^3 ，降数个数为： C_{10}^3
3. 如果是 4 位数，那么升数个数为： C_9^4 ，降数个数为： C_{10}^4
- ...
- 如果是 9 位数，那么升数个数为： C_9^9 ，降数个数为： C_{10}^9
- 如果是 10 位数，没有升数，降数个数为： C_{10}^{10}

全部相加，得，总数为：

$$\begin{aligned}
 & (C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 + \dots + C_9^9) - C_9^0 + (C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + \dots + C_{10}^{10}) - (C_{10}^0 + C_{10}^1) \\
 &= 2^9 - 1 + 2^{10} - 11 \\
 &= 1524
 \end{aligned}$$

Answer : B

第 18 题

考点：排列组合

关键思路解析：这 6 个圆虽然形成一个环的形状，但是并不是圆排列问题。如下图，因为如果把图一的图案中各个球都顺时针旋转一个位置到图二所示图案，这两个图案并非同一种排列。而在圆排列里，我们是看作同一种排列。因此这个问题不是圆排列问题。

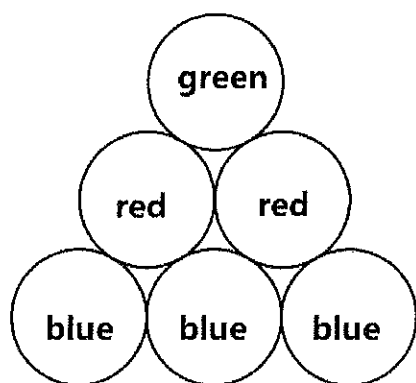


figure 1

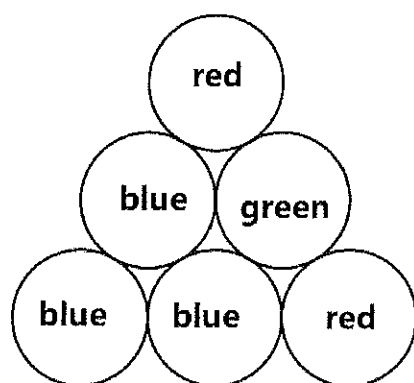
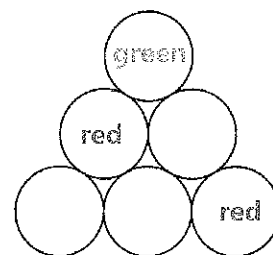
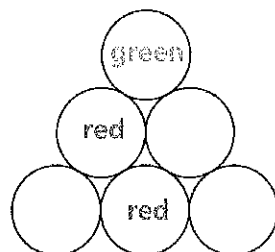
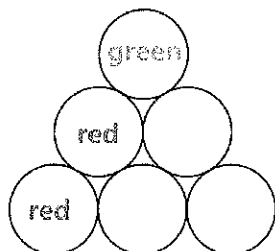
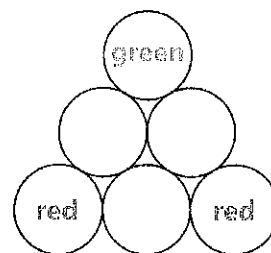
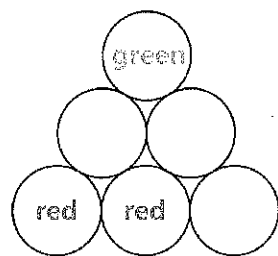
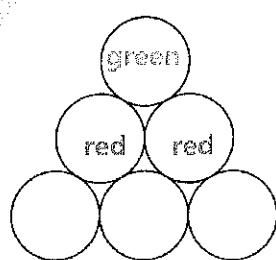


figure 2

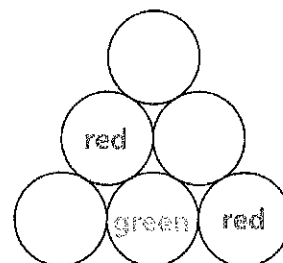
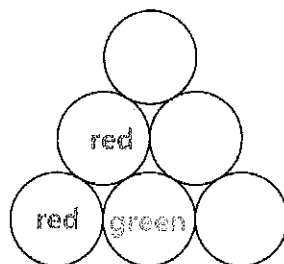
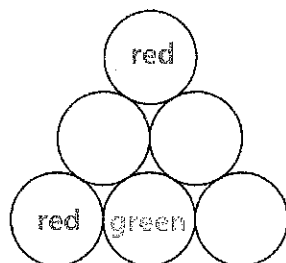
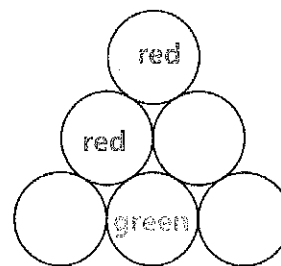
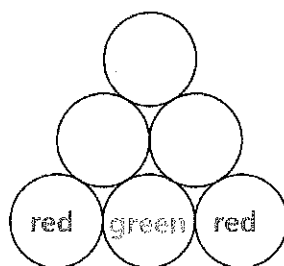
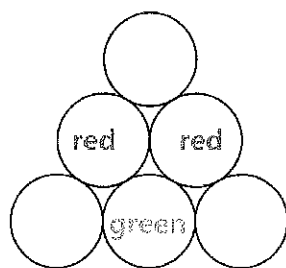
观察答案选项，都是不太大的数字，因此我们枚举即可，不过是有规律的枚举。

因为绿球个数只有 1 个比较特殊，因此以绿球的位置分类讨论。因为三角形顶点的三个球位置等同，每条边上中间位置的球也是位置等同的，因此我们把绿球的位置分为 2 类：

1. 绿球在顶点处。如下图所示，总共有 6 种图案：



2. 绿球在一边的中间，如下图所示，总共有 6 种.



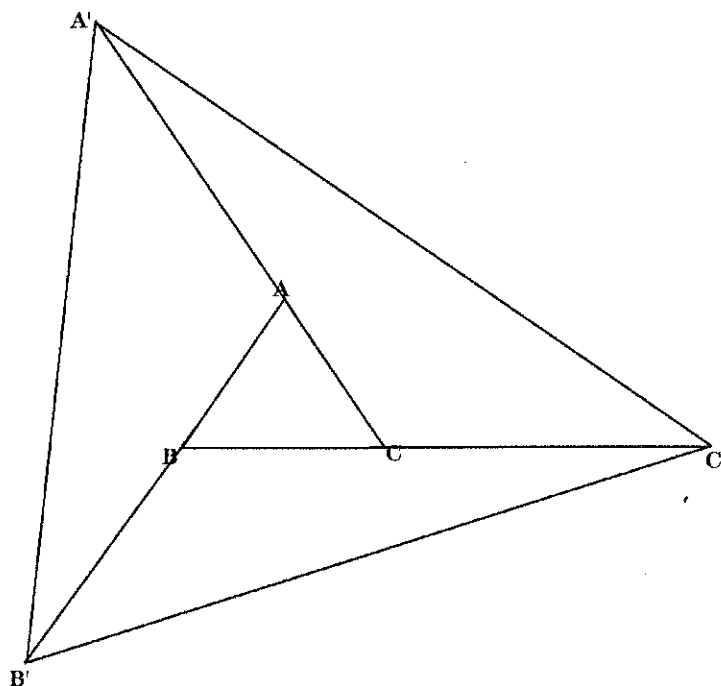
综上,总共 12 种图案.

Answer: D

第 19 题

考点：平面几何（相似三角形）

解答：



因为 $\triangle A'B'A \cong \triangle B'C'B \cong \triangle C'A'C$ ，所以 $A'B' = B'C' = C'A'$ ，因此 $\triangle A'B'C'$ 也为等边三角形。那么 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似，面积之比等于边长比的平方。设 $AB=1$ ，在 $\triangle A'B'A$ 中， $AA'=3, AB'=4, \angle B'AA'=120^\circ$ ，所以由余弦定理， $A'B' = \sqrt{9+16-24\cos 120^\circ} = \sqrt{37}$ 。因此面积比为 $(\sqrt{37})^2 : 1^2 = \boxed{\text{(E)} 37 : 1}$

第 20 题

考点：数论（因子个数定理+ $n!$ 中某个质因数的个数）（知识点见 AMC10/12 双语教材）

解答：假设 $21!$ 质因数分解为： $21! = 2^a 3^b 5^c \dots$ 那么它总共有 $(a+1)(b+1)(c+1)\dots$ 个正因子。其中奇数因子的个数为 $(b+1)(c+1)\dots$ ，因此奇因子的概率为

$P = \frac{(b+1)(c+1)\dots}{(a+1)(b+1)(c+1)\dots} = \frac{1}{a+1}$ 只和 a 有关。而 $21!$ 中因子 2 的个数共有

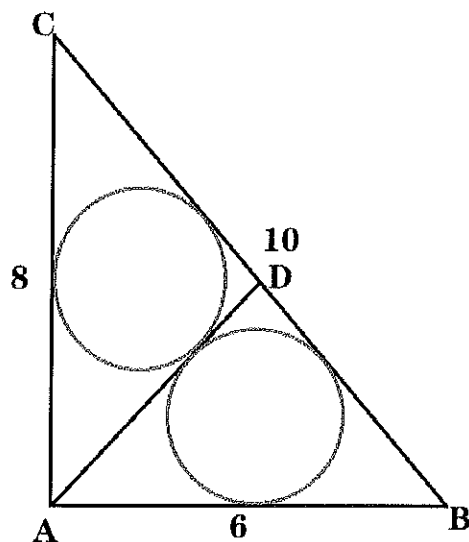
$$\left\lfloor \frac{21}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2^5} \right\rfloor + \dots = 10 + 5 + 2 + 1 = 18, \text{ 因此 } a = 18, P = \frac{1}{a+1} = \frac{1}{19},$$

选 B。

第 21 题

考点：平面几何（内切圆半径公式）

解答：



三角形内切圆半径公式为 $r = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}(a+b+c)}$ ，即三角形的面积除以半周长。因为 D

为直角三角形 ABC 斜边 BC 的中点，所以 $AD = CD = BD = 5$ 。且

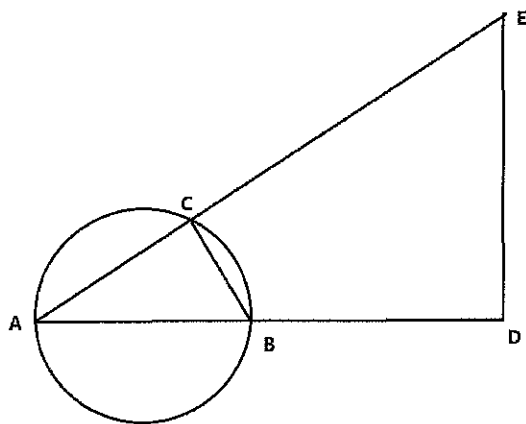
$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 12$ 。所以， $\triangle ADB$ 的内切圆的半径

为 $\frac{12}{(5+5+6)/2} = \frac{3}{2}$ ， $\triangle ADC$ 的内切圆半径为 $\frac{12}{(5+5+8)/2} = \frac{4}{3}$ 。两个

半径相加得 (D) $\frac{17}{6}$

第 22 题

考点：平面几何（相似）



关键思路解析：我们可以根据已知条件得到一些初步结论：根据 AB 是直径得到 $\angle ACB=90^\circ$ 。又因为 $\angle D=90^\circ$ ，所以得到 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ，那么 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle AED$ 的面积就有关系，而後者的面积是直接可以求得的，那么题目就迎刃而解了。

解答：在直角三角形 ADE 中， $AD=7$ ， $DE=5$ ，所以 $AE = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$ ，

$S_{\triangle ADE} = \frac{35}{2}$ 。因为 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ，所以 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{AB}{AE}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{74}}\right)^2 = \frac{16}{74}$ ，所以

$$S_{\triangle ABC} = \frac{16}{74} S_{\triangle ADE} = \frac{16}{74} \cdot \frac{35}{2} = \frac{140}{37}$$

Answer: D

第 23 题

考点：数论（中国余数定理）

关键思路分析：45 是一个合数。要求一个数模 45 的余数，根据中国余数定理，只需要求出这个数模 5 和模 9 后的余数，由此建立同余方程组。在区间 $[0,44]$ 内满足同余方程组的解，即为这个数模 45 的余数。

解答: 先求 N 模 5 的余数, 只需要看最后一位, 最后一位是 4, 所以 $N \equiv 4 \pmod{5}$;

再求 N 模 9 的余数, $N \equiv 1+2+3+4+\dots+43+44 \equiv 0 \pmod{9}$. 由此得同余方程组:

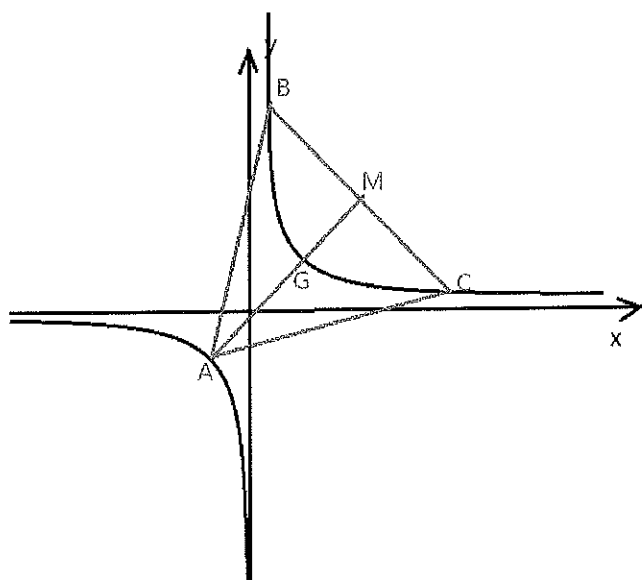
$$\begin{cases} N \equiv 4 \pmod{5} \\ N \equiv 1+2+3+4+\dots+43+44 \equiv 0 \pmod{9} \end{cases}$$

在 $[0, 44]$ 满足上述同余方程组的解为 9.

Answer: C

第 24 题

考点: 解析几何 (双曲线) + 平面几何 (重心的性质)



关键思路解析: 这里重心 G 的坐标通过联立: $y=x$ 和 $xy=1$ 求得, $G(1,1)$, $A(-1,-1)$, 则

$AG = 2\sqrt{2}$. 因为 G 是重心, 所以 $AM = 3\sqrt{2}$. 在直角三角形 ACM 中, 因为

$\angle CAM = 30^\circ$, 所以 $AC = 2\sqrt{6}$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 24 = 6\sqrt{3}. S^2_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 = 108$$

Answer: C

第 25 题

考点: 数论 (不定方程)

关键思路分析:因为每场考试的分数只有个位数有差别,并且题目只要求第6场考试的分数,所以,我们可以假定前5场考试分数个位数之和为 x ,第6场考试分数个位数为 y ,那么第7场考试分数个位数为5.因为每场考试后,前面几场的平均值为整数,所以我们可以列出满足条件的同余方程,后面去解同余方程即可.

解答:

前5场考试平均分为整数,所以, $x \equiv 0 \pmod{5}$;

前6场考试平均分为整数,所以, $x+y \equiv 0 \pmod{6}$;

前7场考试平均分为整数,所以, $x+y+5 \equiv 0 \pmod{7}$

假设 $x+y=a$,则根据第二个方程,得, $a=6k$,代入第3个方程, $6k \equiv -5 \equiv 2 \pmod{7}$,

因为 $\gcd(2,7)=1$,所以, $3k \equiv 1 \pmod{7}$, $k=5+7m$, $a=6k=30+42m$,而 $0 < x+y=a < 60$,

所以 $x+y=30$,又 $x=5n$, $1 \leq y \leq 10$,所以 $x=20, y=10$ or $x=25, y=5$.因为每场考试分

数都不一样,所以 $y=5$ 不合理.所以 $y=10$.那么第6场考试分数为 $90+10=100$.

Answer : E