

2018 AMC10A 解答

第1题

考点：算术

解答：

$$\begin{aligned} \left(\left((2+1)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 &= \left((3^{-1} + 1)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 \\ &= \left(\left(\frac{1}{3} + 1 \right)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 \\ &= \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 \\ &= \left(\frac{3}{4} + 1 \right)^{-1} + 1 \\ &= \left(\frac{7}{4} \right)^{-1} + 1 \\ &= \frac{4}{7} + 1 \\ &= \boxed{\text{(B)} \frac{11}{7}}. \end{aligned}$$

第2题

考点：百分数

解答：假设 Jacqueline 有 1 加仑的汽水，那么 Alice 有 1.25 加仑，Liliane 有 1.5

加仑。那么 Liliane 比 Alice 多了 $\frac{1.5-1.25}{1.25} = 20\%$ ，选 A。

第3题

考点：算术

解答：我们首先需要将 $10!$ 秒转化为天数。先将 $10!$ 秒除以 60 化为分钟数：

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ 分钟。再将这个结果除以 60 化为小时数： $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2$ 小时。

再将此结果除以 24 化为天数： $3 \cdot 7 \cdot 2 = 42$ 天。因此从 1 月 1 号开始，过 42 天后， $1+42-31=12$ ，是 2 月 12 号，选 E。

第 4 题

考点：排列组合（插空法）

关键思路解析：因为数学课不能在相邻的两天上课，需要分开，所以这里用插空法先确定哪 3 天上数学课，然后把具体的 3 门数学课放入这 3 个位置，是一个全排列。

解答：先把不上数学课的 3 天安排，因为不关心这三天上什么，所以是 1 种方法。这 3 个位置形成 4 个空位，选择 4 个空位其中 3 个，一共有 $C_4^3 = 4$ 种方法。然后把 3 门数学课放入这 3 个空位，并且需要考虑顺序，有 $3! = 6$ 种方法。综上，总共有 $4 \times 6 = 24$ 种方法。

Answer: E

第 5 题

考点：不等式

解答：

由 Alice 和 Bob，我们知道， $5 < d < 6$ 。由 Charlie，我们知道， $4 < d$ 。这 2 个不等式的交集为 (D) (5, 6)

第 6 题

考点：百分数

解答：因为 65% 的投票是喜欢票，所以 35% 的投票是不喜欢票。

$65\% - 35\% = 30\%$, 表明 90 票占了总票数的 30%。所以总票数为 $\frac{90}{30\%} = 300$,

选 **(B) 300**。

第 7 题

考点: 数论 (整数)

解答:

对原式进行化简, $4000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n = (2^5 \cdot 5^3) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2^{5+n} \cdot 5^{3-n}$. 因为结果是个整数, 所以必须满足

1. $5 + n \geq 0$, 解得, $n \geq -5$.

2. $3 - n \geq 0$, 解得 $n \leq 3$.

因此 $-5 \leq n \leq 3$. 所以 n 共有 $3 - (-5) + 1 = \mathbf{(E) 9}$ 个整数值。

第 8 题

考点: 代数 (列方程解应用题)

解答: 令 x 为 Joe 拥有的 5 分硬币的个数, 因此他有 $x+3$ 枚 10 分硬币, 以及

$(23 - (x+3) - x)$ 枚 25 分硬币。因为硬币的总价值为 320 美分, 所以

$$5x + 10(x + 3) + 25(23 - (x + 3) - x) = 320$$

$$5x + 10x + 30 + 500 - 50x = 320$$

$$35x = 210$$

$$x = 6.$$

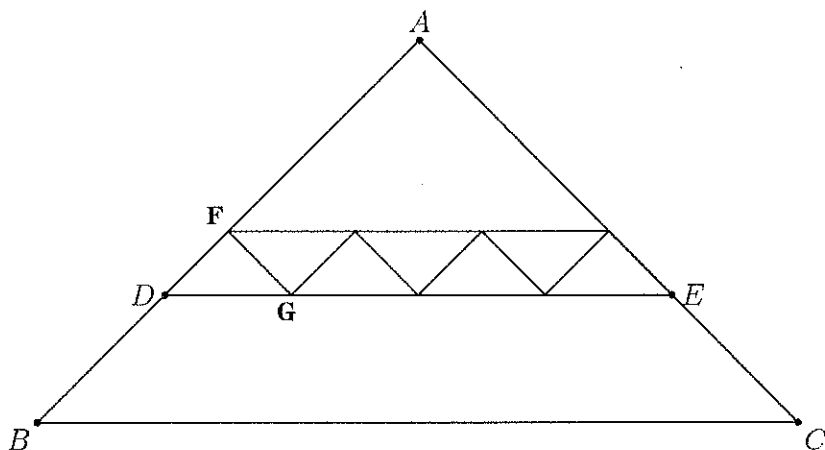
因此 Joe 有 6 枚 5 分硬币 8 枚 25 分硬币。25 分硬币比 5 分硬币多 2 枚, 答案为

$$8 - 6 = \mathbf{(C) 2}.$$

第9题

考点：平面几何（相似三角形）

解答：



因为 $\triangle DFG \sim \triangle DAE$ ，所以 $\frac{S_{\triangle DFG}}{S_{\triangle DAE}} = \left(\frac{DG}{DE}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ ，即 $\frac{1}{S_{\triangle DAE}} = \frac{1}{16}$ ，所以

$S_{\triangle DAE} = 16$ 。因此 $S_{\triangle DBCE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle DAE} = 40 - 16 = 24$ ，选 E。

第10题

考点：代数（根式）

解答：为了消除根号，我们乘以共轭，

$$(\sqrt{49-x^2} + \sqrt{25-x^2})(\sqrt{49-x^2} - \sqrt{25-x^2}) = 49 - x^2 - 25 + x^2 = 24$$

而因为

$$(\sqrt{49-x^2} - \sqrt{25-x^2}) = 3, (\sqrt{49-x^2} + \sqrt{25-x^2}) = \frac{24}{3} = \boxed{(A) 8}$$

第11题

考点：排列组合（球和罐子模型）

关键思路解析：7个骰子可以看成是7个罐子，上面的数字之和是10，可以看成

是7个罐子里面球的数目总共加起来是10. 而骰子上的数字至少是1, 对应罐子不能为空. 所以这是球和罐子模型, 罐子不能为空, 下面运用这个模型求出 n 即可.

解答: 10 个一模一样的球放入 7 个罐子, 罐子不为空, 则有 $C_{10-1}^{7-1} = C_9^6 = C_9^3 = 84$

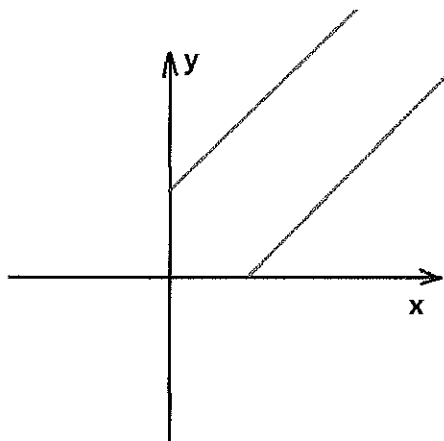
Answer : E

第 12 题

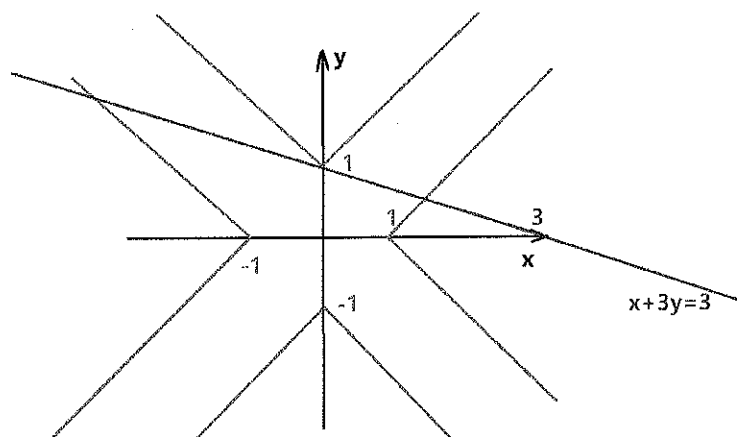
考点: 代数 (数形结合)

关键思路解析: 此题依然是把方程组所代表的两张图像画出来, 再观察有几个交点即可. 第一个是一条直线, 很容易画出来. 第二个, 可先分析图像具备的对称性, 再画图.

解答: 对于第二个方程, 若用 $-x$ 代替 x , 仍满足原来方程, 说明它的图像关于 y -轴对称. 若用 $-y$ 代替 y , 也仍满足原来方程, 说明它的图像又关于 x -轴对称. 因此, 我们只需要先画出它在第一象限的图像, 其他象限对称得到即可. 第一象限的 x 和 y 都是正的, 因此方程变成: $|x-y|=1$, 即, $x-y=\pm 1, y=x\pm 1$. 所以第一象限的图像如下图:



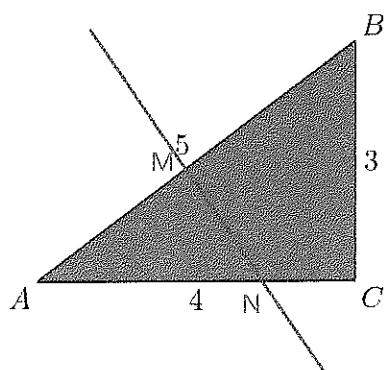
然后由对称性作出其他象限图像。最后把第一个方程所代表的直线也画在一张图上, 如下图, 从图中可以看到, 它们一共有 3 个交点。



Answer: C

第 13 题

考点: 平面几何 (相似三角形)



关键思路解析: 折痕(crease)是 AB 的垂直平分线(perpendicular bisector), 所以

$$AM = \frac{5}{2}. \quad \triangle AMN \cong \triangle ACB, \quad \text{因此} \quad \frac{AM}{MN} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{\frac{5}{2}}{MN} = \frac{4}{3}, \quad MN = \frac{15}{8}$$

Answer: D

第 14 题

考点: 算术

解答：设 $\frac{3^{100} + 2^{100}}{3^{96} + 2^{96}} = a$ ，则 $3^{100} + 2^{100} = 3^{96}a + 2^{96}a$ ， $3^{96}(81 - a) = 2^{96}(a - 16)$ ，所以

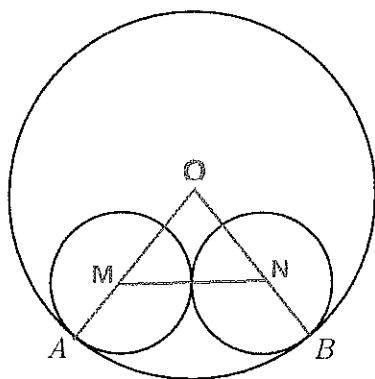
$\frac{81 - a}{a - 16} = \left(\frac{2}{3}\right)^{96} \approx 0$ ，等号的右边是个很小的正数，把它近似看成 0 后，则 $a = 81$ 。

但是实际上是个等式右边是个正数，表明 $81 - a > 0$ ， $a < 81$ ，说明 a 是个很靠近

81 但小于 81 的数，则小于或等于 a 的最大整数为 **(A) 80**。

第 15 题

考点：平面几何（相切圆和相切三角形）



解答：假设两个小圆的圆心分别是 M 和 N，大圆圆心为 O，则 $OM = ON = 13 - 5 = 8$ ，

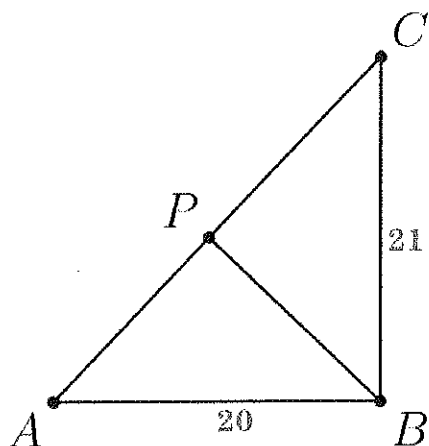
$OA = OB = 1$ ，即， $\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB}$ ，且 $\angle O$ 为公共角，所以 $\triangle OMN \sim \triangle OAB$ ，则

$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OA} = \frac{8}{13}$ ，而 $MN = 10$ ，则 $AB = 130/8 = 65/4$ ， $m + n = 69$ 。

Answer: D

第 16 题

考点：平面几何（勾股定理）



解答： $AC = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ 。当 $BP \perp AC$ 时，BP 最短，为 $H = \frac{20 \cdot 21}{29} = 14\frac{14}{29}$ ，而 BP 最长等于 BC，为 21，因此 $14\frac{14}{29} \leq BP \leq 21$ ，因此 BP 可取 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 这 7 个不同的整数值，而长度为 15 到 20 的线段分别都有 2 根，而长度为 21 的线段只有 1 根，因此不同的线段总共 $6 \times 2 + 1 = 13$ 根，选 D。

第 17 题

考点：数论（倍数）

解答：观察选项，我们依次尝试 2, 3, 4, 5 和 7。若最小为 2，则 4, 6, 8, 10, 12 均不能放入 S，而此时恰好剩下 3, 5, 7, 9, 11 这 5 个元素，需要全部放入 S，这样保证 S 中有 6 个元素。但 9 是 3 的倍数，不符合要求。若最小为 3，那么 6, 9, 12 不能放入 S，剩下 4, 5, 7, 8, 10, 11 可选。因为 4 和 8, 5 和 10 不能同时放入 S，所以大于 3 的最多还有 4 个数字可放入 S，则 S 中只有 5 个元素，不符合要求。若最小为 4，此时可放入 S 的另外 5 个元素为 5, 6, 7, 9, 11，符合要求。因此选 C。

第 18 题

考点：排列组合（递推方法）

关键思路解析：我们发现，当 a_7 为 -1 时，就算 $a_0 \sim a_6$ 都是 1，整个表达式也不会

为非负数.所以 a_7 只能为 0 或者 1. 当 $a_7=1$ 时, $a_0 \sim a_6$ 可以为 -1, 0, 1 中的任何一个, 所以共 3^7 种. 若 $a_7=0$, 则问题变成了: $a_6 \cdot 3^6 + a_5 \cdot 3^5 + a_4 \cdot 3^4 + \dots + a_0 \cdot 3^0$ 可以写成多少非负整数. 这是个规模更小, 但是可以使用和前面原来问题一模一样的方法解决的问题, 所以想到递推.

解答:

假设 $a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + a_{n-2} \cdot 3^{n-2} + \dots + a_0 \cdot 3^0$ 可以写成 $f(n)$ 个不同的非负整数.

1. 当 $a_n=1$ 时, 则系数 $a_0 \sim a_{n-1}$ 都可取 3 种取值, 还能保证整个表达式为非负数, 一共有 3^n 种.

2. 当 $a_n=0$ 时, 则问题变成了 $a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + a_{n-2} \cdot 3^{n-2} + \dots + a_0 \cdot 3^0$ 有多少种非负取值, 共 $f(n-1)$ 种.

所以, $f(n) = 3^n + f(n-1)$.

则 $f(n-1) = 3^{n-1} + f(n-2)$.

$f(n-2) = 3^{n-2} + f(n-3)$.

....

$f(2) = 3^2 + f(1) = 3^2 + f(1)$.

$f(1) = 3 + f(0) = 3 + 2$

上式所有相加, 得到, $f(n) = 2 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n = 2 + \frac{3(3^n - 1)}{2}$

所以 $f(7) = 2 + \frac{3(3^7 - 1)}{2} = 3281$

Answer: D

第 19 题

考点: 概率 (分类讨论) + 数论 (模运算)

关键思路分析:个位为 1, 即模 10 余 1. 既然 m^n 是个幂(power), 那么, 先找 m 或者 m^2 等类似这种情况, 去分别计算它们模 10 的余数, 一般要使得余数为 1 或者 -1 (方便运用指数性质, 因为 k 次方后还是 -1 或者 1), 然后再运用指数性质, 得到最后的余数.

解答: 我们对 m 分情况讨论.

1. 若 $m=11$, 因为 11 的任何次方模 10 余数都是 1, 所以 n 可以为 1999-2018 中的任何数, 一共 **20 种可能**.

2. 若 $m=13$, 因为 $13^2 \equiv -1 \pmod{10}$, 则 $(13^2)^{2k} \equiv 1 \pmod{10}$, 因此 $n=4k$ 一定是 4 的倍数. 则 n 为: 2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 共 5 种可能性.

3. 如果 $m=15$, 因为无论 n 为多少, 15^n 的个位总是 5, 因此这种情况不考虑.

4. 如果 $m=17$, 情况和 $m=13$ 相同. 因为 $17^2 \equiv 289 \equiv -1 \pmod{10}$, 那么

$(17^2)^{2k} \equiv 1 \pmod{10}$, 所以 $n=4k$ 一定是 4 的倍数. 则 n 为:

2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 共 5 种可能性.

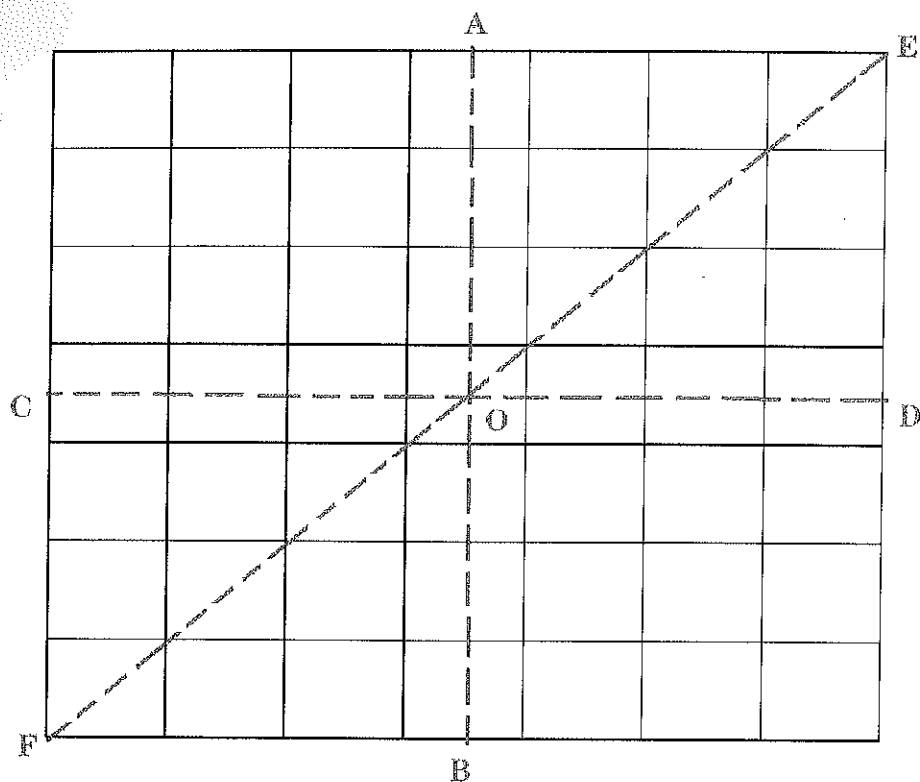
5. 若 $m=19$, 因为 $19^2 \equiv 361 \equiv 1 \pmod{10}$, 那么 $(19^2)^k \equiv 1 \pmod{10}$, 所以 $n=2k$ 是个偶数. 则 n 为: 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018, 共 10 种可能性.

综上, 概率为 $P = \frac{20+5+5+10}{5 \times 20} = \frac{2}{5}$

Answer : E

第 20 题

考点: 排列组合



解答：如上图所示，因为扫描代码关于 AB 对称，因此我们只关心 AB 右侧的扫描代码；而因为扫描代码也关于 CD 对称，则我们只需要关心 CD 上部的扫描代码；又因为扫描代码还关于 EF 对称，因此我们只需要关心 EF 下部分的扫描代码，即 $\triangle EOD$ 内扫描代码的可能性。 $\triangle EOD$ 内有 10 个方格需要涂色，每个方格 2 种涂色方法，但不能全白或全黑，因此总共 $2^{10} - 2 = 1022$ 种涂色方法。涂完后分别关于 EF，AB 以及 CD 作对称，得到整个扫描代码，而这个扫描代码一定是关于 AB，CD，两条对角线对称的，以及绕中心旋转 90° 的倍数对称的。因此选 B。

第 21 题

考点：代数（数形结合）

解答：将 $y = x^2 - a$ 代入方程 $x^2 + y^2 = a^2$ ，得到

$$x^2 + (x^2 - a)^2 = a^2 \implies x^2 + x^4 - 2ax^2 = 0 \implies x^2(x^2 - (2a - 1)) = 0。$$

共4个根, 其中 $x=0$ 是个二重根。所以需要方程 $x^2 - (2a-1)x = 0$ 有两个不同的

根。因此要求 $2a-1 > 0$, 则 $(E) a > \frac{1}{2}$ 。

第22题

考点: 数列 (最大公约数和最小公倍数)

关键思路分析: 因为 gcd 是取的质因数指数最小的幂 (关于具体求法参见店内 AMC12 和 AMC10 中文教材), 所以我们需要先对结果 24, 36 和 54 进行质因数分解, 由结果反推 a, b, c, d 具有的特征。

解答:

$$\gcd(a, b) = 2^3 \times 3 \quad (1)$$

$$\gcd(b, c) = 2^2 \times 3^2 \quad (2) \text{ 由方程 (1), } a = 2^{\geq 3} 3^{\geq 1}, b = 2^{\geq 3} 3^{\geq 1};$$

$$\gcd(c, d) = 2 \times 3^3 \quad (3)$$

由方程 (2), $b = 2^{\geq 2} 3^{\geq 2}, c = 2^{\geq 2} 3^{\geq 2}$; 由方程 (3), $c = 2^{\geq 1} 3^{\geq 3}, d = 2^{\geq 1} 3^{\geq 3}$; 因此, 有

$a = 2^{\geq 3} 3^{\geq 1}, b = 2^{\geq 3} 3^{\geq 2}, c = 2^{\geq 2} 3^{\geq 3}, d = 2^{\geq 1} 3^{\geq 3}$. 有了这个结果后, 再考虑方程 (1), (2), (3),

我们有 $a = 2^{\geq 3} 3; b = 2^{\geq 3} 3^2; c = 2^2 3^{\geq 3}; d = 2 \times 3^{\geq 3}$; 所以 $\gcd(a, d) = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x$,

$70 < 6x < 100, 12 \leq x \leq 16$, 而 x 是由质数 5, 7, 11, 13, 17, ... 中的一个或多个的乘积。显然

只能是 13. 选 D

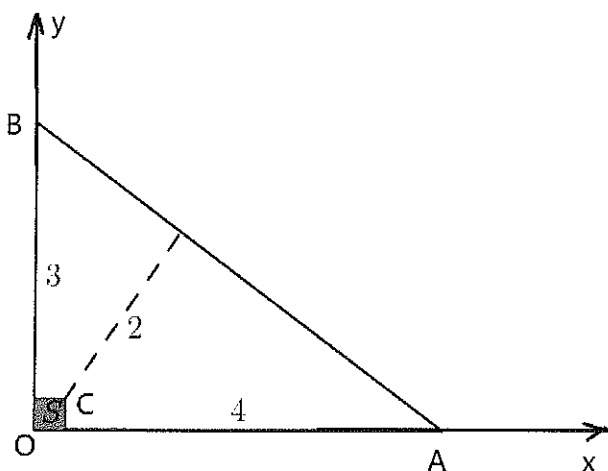
Answer : D

第23题

考点: 平面几何或解析几何

关键思路解析: 我们只要求出阴影部分正方形的边长即可。题目给的是点到直

线的距离为 2 这个条件, 所以想到用点到直线的距离公式.



解答: 建立如图所示坐标系, $A(4,0)$, $B(0,3)$. 那么 AB 的直线方程

为: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$. 设正方形边长为 a , 那么 $C(a,a)$. C 到直线

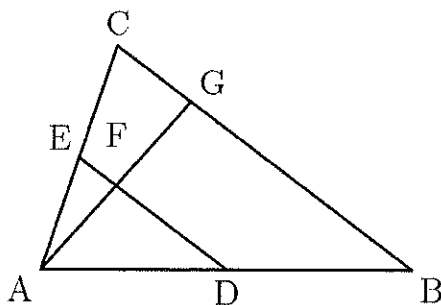
$3x + 4y - 12 = 0$ 的距离为: $d = \frac{|3a + 4a - 12|}{5} = \frac{|7a - 12|}{5} = 2$, 解得, $a = \frac{22}{7}$, or $\frac{2}{7}$. 当 $a = \frac{22}{7}$, 那么 C 点位于直线右边, 不合题意, 所以 $a = \frac{2}{7}$, 那么阴影部分面积占了

总面积的 $\frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{2}{6}} = \frac{2}{147}$, 那么种植面积占了总面积的 $\frac{145}{147}$.

Answer: D

第 24 题

考点: 平面几何 (角平分线定理, 中位线)



关键思路解析: ED 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 因此 $ED \parallel BC$, 可得, $\triangle AFD \sim \triangle AGB$. 所

以 $S_{\triangle AFD} = \frac{1}{4} S_{\triangle AGB} \rightarrow S_{FDBG} = \frac{3}{4} S_{\triangle AGB}$. 接下来只要求出 $\triangle AGB$ 的面积就可以了, 而

它的面积跟 $\triangle ABC$ 的面积是有关系的,容易求得.

解答: 因为 AG 为角平分线, 所以 $\frac{BG}{CG} = \frac{AB}{AC} = 5$, 因此 $S_{\triangle AGB} = \frac{5}{6} S_{\triangle ABC} = 100$. 根据

先前分析, $S_{\triangle DBG} = \frac{3}{4} S_{\triangle AGB} = 75$

Answer: D

第 25 题

考点: 数列+数列 (不定方程)

解答: 由题意, $A_n = a(1 + 10 + \cdots + 10^{n-1}) = a \cdot \frac{10^n - 1}{9}$; 类似

的, $B_n = b \cdot \frac{10^n - 1}{9}$, $C_n = c \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9}$. 方程 $C_n - B_n = A_n^2$ 则变成

$$c \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} - b \cdot \frac{10^n - 1}{9} = a^2 \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9} \right)^2. \quad \text{因为 } n > 0, 10^n > 1, \text{ 所以}$$

我们可以两边消去 $\frac{10^n - 1}{9}$, 得到, $c \cdot (10^n + 1) - b = a^2 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$. 这是个关于

10^n 的一元一次方程. 如果 n 至少有 2 个不同值可以满足方程, 则所有的 n 值都

满足方程, 因此方程的左右系数一一对应, 得,

$$c = \frac{a^2}{9}, \text{ 以及 } c - b = -\frac{a^2}{9}, \text{ 得到 } b = \frac{2a^2}{9}. \text{ 为了使得 } a + b + c = a + \frac{a^2}{3} \text{ 最大, 则}$$

应该使得 a 最大, 而 b, c 为整数, 因此 a 为 3 的倍数. 若 $a = 9$, 则 $b > 9$; 若 $a = 6$, 此

时 $b = 8, c = 4$ 符合要求. 因此 $a + b + c$ 最大为 18. 选 D.