

2018 AMC10B 解答

第1题

考点：算术

解答：整块玉米面包的面积是 $20 \cdot 18 = 360$ 。因为每一块的面积是 $2 \cdot 2 = 4$ ，

因此一共包含 $\frac{360}{4} = \boxed{(A) 90}$ 块。

第2题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：设最后 30 分钟内的平均速度为 x 英里每小时，那么 $60 \cdot \frac{1}{2} + 65 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 96$ ，

解得， $x = 67$ ，选 D。

第3题

考点：排列组合

解答：方法一：排列组合方法

先从 4 个数中选择 2 个数放入第一个括号，剩下 2 个数放入第二个括号，有 $C_4^2 = 6$

种方法。因为两个括号前后顺序不加以区分（加法的交换律），因此不同的结果

为 $6 \div 2 = 3$ 种，选 B。

方法二：枚举法：

$$(1 \times 2) + (3 \times 4) = 14; (1 \times 3) + (2 \times 4) = 11; (1 \times 4) + (2 \times 3) = 10;$$

$$(2 \times 3) + (1 \times 4) = 10; (2 \times 4) + (1 \times 3) = 11; (3 \times 4) + (1 \times 2) = 14; \text{ 共有 3 个不同的结}$$

果, 选 B。

第 4 题

考点: 立体几何

解答: 令 X 为最短的棱长, Z 为最长的棱长, 则有, $XY = 24, YZ = 72$, 以

及 $XZ = 48$ 。将前两个方程相除, 得到, $\frac{Z}{X} = 3$, 和第三个方程相乘, 得到, $Z^2 = 144$, 则 $Z = 12$, 因此 $X = 4, Y = 6$ 。最后答案为 $4 + 6 + 12 = 22$, 选 B。

第 5 题

考点: 排列组合 (考虑反面)

关键思路解析: 含有至少一个质数, 可能是 1 个, 也可能是 2 个, etc... 情况比较多, 并且每一种情况的集合里, 可能还会含有合数, 所以比较复杂。那么从反面来考虑: 一个质数都没有的集合一共多少个。所以集合的元素是从合数 4, 6, 8, 9 里面选择。算出所有的可能性。把总的可能性减去反面可能性, 即得到答案。

解答:

反面: 从合数 4, 6, 8, 9 里选择, 能够组成的集合个数为:

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$$

从 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 中选择, 能够组成的集合个数为:

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 = 2^8 = 256$$

所以总的可能性是: $256 - 16 = 240$ 种。

Answer: D

第6题

考点：概率

解答：说明前2次之和不超4。即等价于求前2次之和不超4的概率。则抽

取的两个芯片只能是1和2，或1和3，因此概率为 $P = \frac{2}{C_5^2} = \frac{1}{5}$ ，选D。

第7题

考点：平面几何

解答：由题意，所有小半圆面积之和与大半圆的面积之比是1:19，所以一个小半圆的面积和这个大半圆面积之比为 $\frac{1}{19N}$ 。而每个小半圆和大半圆相似，且它们的

直径之比为 $\frac{1}{N}$ ，因此 $\frac{1}{19N} = \left(\frac{1}{N}\right)^2$ ，解得， $N=19$ ，选D。

第8题

考点：数列

解答：假设 $n-1$ 阶楼梯共用 $f(n-1)$ 根牙签，那么由图可以看到，当堆出第 n 节楼梯时，还需要 $2(n+1)$ 根牙签。因此 $f(n) - f(n-1) = 2(n+1)$ 。我们用累加法。

$$f(n) - f(n-1) = 2(n+1)$$

$$f(n-1) - f(n-2) = 2n$$

...

$$f(2) - f(1) = 2 \cdot 3$$

将上述各式子相加，得到， $f(n) - f(1) = 2(3+4+\dots+n+1) = (n+4)(n-1)$ ，而

$f(1) = 4$ ，所以 $f(n) = (n+4)(n-1) + 4 = n^2 + 3n$ 。令 $f(n) = n^2 + 3n = 180$ ，解得，

$n=12$, 选 C。

第 9 题

考点: 概率

关键思路解析: 这道题的思路跟我们推导公式 $C_n^k = C_n^{n-k}$, 因为每次从 n 个物体里选择 k 个, 就会有 $n-k$ 个没有被选中, 那么选中 k 个的方法数和没有选中 $n-k$ 个(反面)的方法数是一样的. 这里也一样. 每一种 7 个骰子上数字之和为 10 的可能性, 都对应一个反面情况. 关键这里的反面是什么? 对于正面情况, 每个骰子上的数字最少是 1, 最大是 4. 而对应于反面, 每个骰子上的数字因为最大是 6(正面 1 对应反面 6, 之和不变, 等于 7). 所以我们可以由此得到, 反面可以这样形成: 对于正面每一种情况, 我们把 7 减去每个骰子上的数字, 得到每个骰子的反面情况, 且每一个正面情况都唯一对应一种反面情况. 所以反面之和就是: $7 \times 7 - 10 = 39$. 那么有没有可能反面的情况对应不到正面的情况呢? 没有. 能让反面对应不到正面的只可能是反面有骰子上的数字是小于 3, 那么对应的正面的数字就大于 4 了. 而当反面有一个骰子上数字是 2 时, 其他 6 个骰子即使都是最大 6, 那么之和也是 38, 达不到 39. 所以反面的情况也唯一对应正面情况. 正反面一一对应.

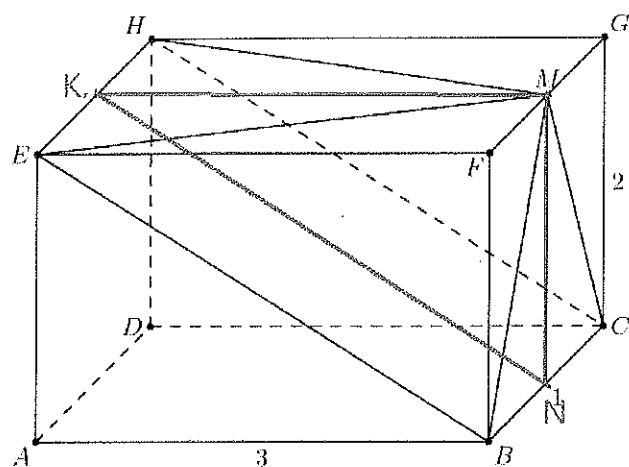
解答: 根据上述分析, $49-10=39$ 为答案。

Answer : D

第 10 题

考点: 立体几何

解答:



- (A) 1 (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) 2

这道题最简便的方法是用长方体上半部分的体积, 减去两个四面体 E-FBM 和 H-GMC 的体积. 这里我们为了体现立体几何问题转化为平面几何的解题思想, 直接求 M-BCHE 的体积. 底面 BCHE 面积已知, 为 $\sqrt{13}$. 接下来是求出 M 点到 BCHE 的距离. 需要先找到过 M 点垂直 BCHE 的平面: 取 BC 中点 N, HE 中点 K, 则平面 MNK $\perp$ 平面 BCHE, 那么过 M 点作 MH $\perp$ KN, 则 MH 必然为高. 因为在直角三角形 KMN 中, KM=3, MN=2, 斜边 KN= $\sqrt{13}$, 所以 $MH = \frac{6}{\sqrt{13}}$, 那么

$$V_{M-BCHE} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} = 2.$$

Answer: E

第 11 题

考点: 数论 (质数)

解答: 如果我们代入一个特殊的 p 值后, 选项中某个表达式的值是个质数, 则不是答案. 所以先代特殊值检验。

- A) $p^2 + 16$ 不对, 因为当 $p = 5$, 表达式值为 $25 + 16 = 41$ 是个质数。
- B) $p^2 + 24$ 不对, 因为当 $p = 7$, 表达式的值为 $49 + 24 = 73$ 是个质数。
- C) $p^2 + 26$ 暂时没法找到使得表达式为质数的 p 值。
- D) $p^2 + 46$ 不对, 因为当 $p = 5$, 表达式的值为 $25 + 46 = 71$ 是个质数。
- E) $p^2 + 96$ 不对, 因为当 $p = 19$ 表达式的值是 $361 + 96 = 457$ 是个质数。

实际上, 当 p 是个大于 3 的质数时, 因为 $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$, 所以

$p^2 + 26 \equiv 1 + 26 \equiv 0 \pmod{3}$, 即对于所有 $p > 3$ 的质数, $p^2 + 26$ 永远是 3 的倍数, 不是质数。而当 $p=2$ 和 3 时, $p^2 + 26$ 分别为 30 和 35 也不是质数, 因此对所有质数 p , $p^2 + 26$ 都不是质数, 选 C。

第 12 题

考点: 平面几何 (重心)

关键思路解析: 因为重心(centroid)在中线(median)的 $2/3$ 处. 所以 $OG = \frac{1}{3} \cdot CO = 4$

是一个固定的长度. 所以 G 的轨迹是一个以 O 为圆心, 4 为半径的圆.

解答: 轨迹所形成的圆的面积为: $\pi 4^2 = 16\pi \approx 50$

Answer: C

第 13 题

考点: 数论 (模运算)

关键思路分析: 先写出这些数字的一般形式, 用 n 表示, 然后列出同余方程(整除问题也是同余问题, 只是余数为 0), 然后用模运算对式子进行化简, 看 n 需要满足什么条件. 满足条件的所有 n 都是问题的解.

解答：这些数字的一般形式是：第 n 个数是： $10^{n+1}+1$ ，所以

$10^{n+1}+1 \equiv 0 \pmod{101} \Rightarrow 10^{n+1} \equiv -1 \equiv 100 \pmod{101}$ 。因为 $(100, 101)=1$,

$10^{n-1} \equiv 1 \pmod{101}$ 。又因为 $10^2 \equiv -1 \pmod{101}$ ，然后由指数性质

$(10^2)^{2k} \equiv 1 \pmod{101}$ ，意味着 $n-1=4k$, $n=4k+1$ 。因为 $1 \leq n=4k+1 \leq 2018$ ，解得

$0 \leq k \leq 504$ 。因此一共有 505 这样的数。

Answer: C

第 14 题

考点：数据分析（众数）

解答：要使得不同的数最少，则需要使得这些不同的数尽可能多的重复出现。而

因为唯一的众数只出现 10 次，因此其他数最多各出现 9 次。 $\frac{2018-10}{9} = 223$ 余 1，

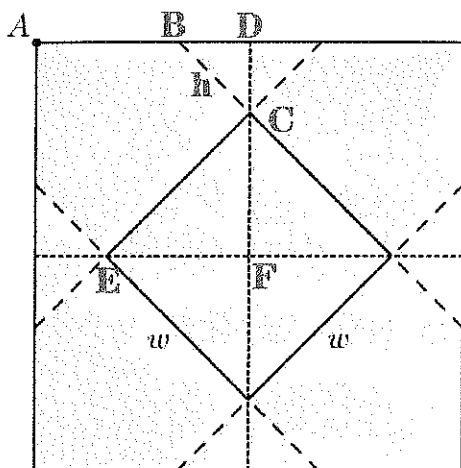
表明，除唯一众数出现 10 次外，223 个不同的数各出现 9 次，另外最后一个数

只出现 1 次。因此一共有 $1+223+1=225$ 个不同的数，选 D。

第 15 题

考点：平面几何（特殊直角三角形）

解答：



如上图所示, 在等腰直角 $\triangle CEF$ 中, $CE = w$, 所以 $CF = \frac{\sqrt{2}w}{2}$ 。而在等腰直角 $\triangle BDC$ 中, $BC = h$, 所以 $CD = \frac{\sqrt{2}h}{2}$ 。因此 $DF = DC + CF = \frac{\sqrt{2}(w+h)}{2}$, 那么正方形包装纸的边长为 $2 \cdot DF = \sqrt{2}(w+h)$, 面积为 $[\sqrt{2}(w+h)]^2 = 2(w+h)^2$, 选 A。

第 16 题

考点: 数论 (模运算)

关键思路分析: 已知的是相加, 要求的也是一个相加的式子模 6 的余数, 这里肯定是要用到模运算的加法性质。认识到这一点后, 我们再看, 已知的是一次方, 而要求的是三次方, 所以需要找到一次方和三次方的关系。猜想一个数和它的三次方模 6 的余数相等。为确定这一点, 先找 2-3 个数字试一试, 若都满足的话, 基本能确定这个结果, 再去严格证明下。

解答: 现在证明 $a \equiv a^3 \pmod{6}$ 。因为 $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$, 这是三个连续的整数, 必定存在偶数, 所以 $2 \mid (a-1)a(a+1)$ 。三个连续的整数, 其中必有一个是 3 的倍数, 所以 $3 \mid (a-1)a(a+1)$ 。所以 $6 \mid (a-1)a(a+1)$ 。即, $a^3 - a \equiv 0 \pmod{6}$, 所以 $a \equiv a^3 \pmod{6}$ 。因此,

$$\begin{aligned}
 a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2018}^3 &\equiv a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} \\
 &\equiv 2018^{2018} \equiv 2^{2018} \pmod{6}
 \end{aligned}$$

因为

$$2^1 \equiv 2 \pmod{6}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{6}, \text{ 我们看到, 周期为 } 2, \text{ 所以 } 2^{2018} \equiv 4 \pmod{6}$$

$$2^3 \equiv 2 \pmod{6}$$

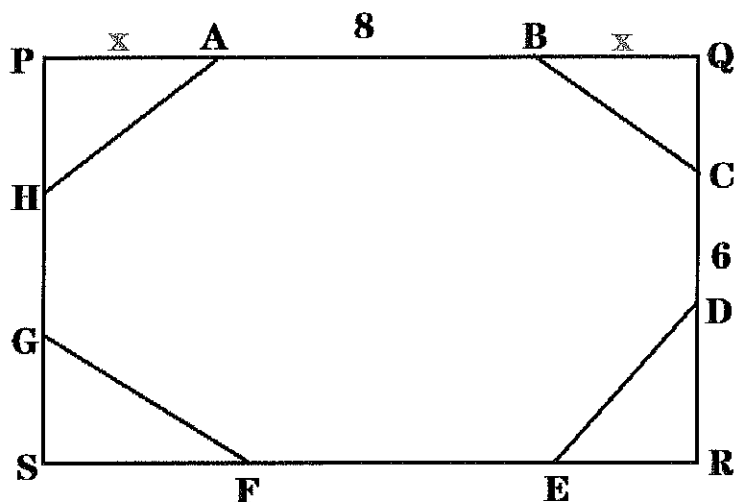
$$2^4 \equiv 4 \pmod{6}$$

Answer : E

第 17 题

考点: 平面几何

解答:



设 $PA = BQ = x$, 则 $AB = 8 - 2x$ 。容易证明, $\triangle PAH \cong \triangle QBC$, 所以 $PH = QC$,

又 $GH = CD$, 所以 $GS = DR$ 。因此容易证明 $\triangle GSF \cong \triangle DRE$, 所以 $SF = ER$, 因

为 $EF = AB = 8 - 2x$, 所以 $SF = ER = x = PA$ 。因此 $\triangle GSF \cong \triangle HPA$, 那么

$$PH = GS = \frac{6 - HG}{2} = \frac{6 - (8 - 2x)}{2} = x - 1。在直角 \triangle PAH 中, 由勾股定理,$$

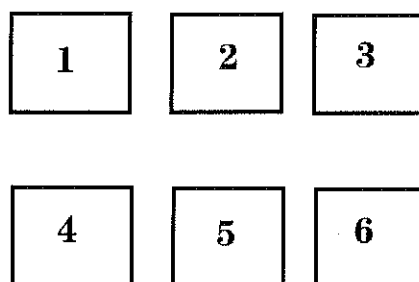
$$x^2 + (x - 1)^2 = (8 - 2x)^2, \text{ 解得, } x = \frac{15 - 3\sqrt{11}}{2}, \text{ 那么}$$

$$AB=8-2x=8-(15-3\sqrt{11})=3\sqrt{11}-7 \Rightarrow \boxed{(B) 7}.$$

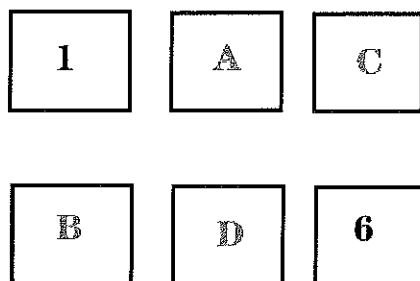
第 18 题

考点：排列组合

解答：



假设这 3 对孩子分别是 A 和 B 一对，C 和 D 一对，E 和 F 一对。这 6 个作为如上图编号。先安排座位 2 和 5，因为这两个座位限制条件较多。这两个座位不能坐来自于同一家庭的孩子，因此先确定这两个孩子来自于 3 对里的哪两对，共有 $C_3^2 = 3$ 种方法。再从这两对里分别选一个孩子，共有 $2 \times 2 = 4$ 种方法。选出来的这 2 个孩子安排到座位 2 和 5 中，共有 2 种方法。例如，座位 2 安排了 A，座位 5 安排了 D。如下：



此时 B 只能安排到座位 4 或 6，有 2 种方法。若 B 安排到了座位 4，如果 C 坐到

座位 1, 那么剩下的两个座位是前后座位, 无法安排 E, F。因此 C 只能坐到座位 3。接着将 E, F 安排到座位 1 和 6, 共有 2 种方法。

综上, 总共有 $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ 种安排方法, 选 D。

第 19 题

考点: 数论 (不定方程)

关键思路分析: 首先根据题目意思, 需要设合适的变量, 把题中黑体表示的那句话的关系, 用数学方程表达出来。因为年龄和年数是整数, 所以这是个不定方程, 然后采用我们讨论过的不定方程几种解法解答就行了。

解答: 假定 Chloe 的年龄当前是 x 岁, 那么 Joey 的年龄是 $x+1$ 岁, k 年后, Chloe 年龄为 $(x+k)$ 岁, Zoe 是 $(k+1)$ 岁。那么, $x+k=m(k+1)$ 。观察这个关键的方程, 这其实是个 SFFT 类型的方程, 化成 $(k+1)(m-1)=x-1$, 右边是个常数(constant)。根据题目意思, 这个关于未知整数 k 方程对应的解有 9 个, 而 $k+1$ 是 $x-1$ 的一个因子(divisor), 所以意味着 $x-1$ 有 9 个因子, 所以 $x-1$ 是个平方数(perfect square)。有 9 个因子的平方数是 36, 所以 $x=37$ 。

Joey 今年 38 岁。假设 a 年后, Joey 的年龄是 Zoe 的整数倍, 所以, $38+a=n(1+a)$, 同样应用 SFFT, $(n-1)(a+1)=37$, 所以 $a+1=37$, $a=36$ 。36 年后, Joey 74 岁。

Answer: E

第 20 题

考点: 代数 (递推函数)

关键思路解析：这仍然是一个三阶的数列，首先通过多写一项相加减，把它化为二阶。

解答：由 $f(n) = f(n-1) - f(n-2) + n$ ，得到， $f(n-1) = f(n-2) - f(n-3) + n-1$ 。

两式相加，得到， $f(n) + f(n-3) = 2n-1$ ，再将 n 用 $n-3$ 代替，

$f(n-3) + f(n-6) = 2n-7$ 。两式相减，得到， $f(n) = f(n-6) + 6$ 。此时可通过累

加法：

$$f(2018) = f(2012) + 6$$

$$f(2012) = f(2006) + 6$$

...

$$f(8) = f(2) + 6$$

相加得到， $f(2018) = f(2) + 6 \cdot 336 = 1 + 2016 = 2017$ 。

Answer: B

第 21 题

考点：数论（因子，质因数分解）

关键思路分析：因为 323 是 n 的一个因子(factor)。而我们知道，一个数的因子是由这个数的所有质因数(prime factors)选择其中几个组合而成的。所以 323 的质因数必定也是 n 的质因数。这样就知道了 n 的其中几个质因数，那么根据题意，再合理推断出 n 的其他可能质因数，那么就能断定比 323 大的下一个因子是多少了。

解答： $323 = 17 \cdot 19$ 。所以 $n = 2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot x, 2 \leq x \leq 15$ 。(因为 n 是个四位数)。 n 中下一个比 $323 = 17 \cdot 19$ 大的因子可能是 $17 \cdot 20 = 340$ ($17 \cdot 20 = 17 \cdot 2 \cdot 10$, 此时 $x=10$ 合理)；或者 $18 \cdot 19 = 342$ ($18 \cdot 19 = 19 \cdot 2 \cdot 9$, 此时 $x=9$ 也是合理的)；但 340 更小，所以最小为 340。

Answer: C

第 22 题

考点：概率（几何概型）

解答：因为是个钝角三角形，且 1 是最长边。根据余弦定理， $1 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$ 。

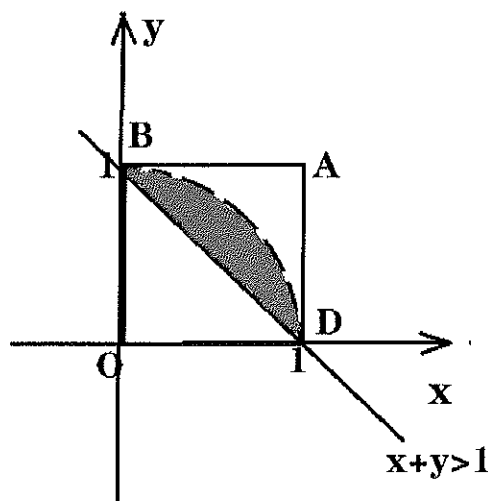
其中 θ 是边长为 1 的边所对的顶角，是个钝角，因此 $\cos \theta < 0$ ，那么 $x^2 + y^2 < 1$ 。

因此 x, y 需满足下面不等式组：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ x + y > 1 \end{cases}$$

第一个不等式表示圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的内部，且位于第一象限的部分。第二个不等式

表示直线 $x + y = 1$ 的上方。两者的交集如下图阴影部分区域所示：



阴影部分面积是 $\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \approx 0.29$ 。而因为 x 和 y 分别独立且均匀随机的从区间

$[0,1]$ 中选择，即点 (x,y) 位于正方形 $ABOD$ 上及其内部，正方形 $ABOD$ 面积为

1。因此概率为 $P = \frac{0.29}{1} = 0.29$ ，选 C。

第 23 题

考点：数论（最小公倍数，最大公约数）

关键思路分析：这里我们需要用到一个很关键的关系式来转化题目中给的不定方程： $ab = \gcd(a,b) \cdot \text{lcm}(a,b)$ ；若假设 $\gcd(a,b)=x$, $\text{lcm}(a,b)=y$, 则方程转化成 $xy+63=20y+12x$. 这是个典型的不定方程，可以用分解因式的方法解决。

解答：因为 $xy-20y-12x+63=0, \Rightarrow (x-20)(y-12)=177=3 \times 59$; 所以

$$\begin{cases} x-20=1 \\ y-12=177 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-20=3 \\ y-12=59 \end{cases} \text{ 因此, } \begin{cases} x=21=3 \times 7 \\ y=189=3^3 \times 7 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=23 \\ y=71 \end{cases} \text{ (舍去, 因为 } y \text{ 必须}$$

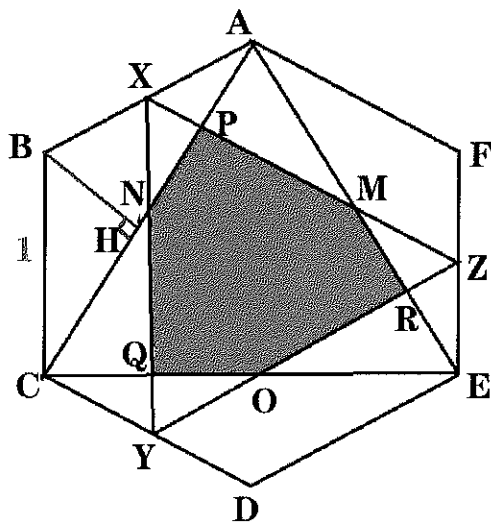
是 x 的倍数), 因此 $\gcd(a,b)=3 \cdot 7$ 且 $\text{lcm}(a,b)=3^3 \cdot 7$. 那么 $\begin{cases} a=3 \times 7 \\ b=3^3 \times 7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=3^3 \times 7 \\ b=3 \times 7 \end{cases}$.

选 B。

第 24 题

考点：平面几何（特殊直角三角形）

解答：



我们要求的是六边形 $PMROQN$ 的面积，可以看成是等边三角形 AEC 的面积，减去 $\triangle AMP$, $\triangle ROE$ 以及 $\triangle NQC$ 的面积。而这 3 个三角形全等，所以我们只需求

出其中一个即可，例如 $\triangle AMP$ 的面积。过 B 作 $BH \perp AC$ 。因为等腰 $\triangle BCA$ 中，

$BC = BA = 1$ ，所以 $\angle ABH = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ$ ，因此 $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $AC = \sqrt{3}$ 。由于 X

为 AB 的中点，且 $XP \parallel BH$ ，所以 $AP = \frac{1}{2}AH = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 。在直角 $\triangle APM$ 中，因为

$\angle PAM = 60^\circ$ ，所以 $PM = \sqrt{3}AP = \frac{3}{4}$ ，那么 $S_{\triangle PAM} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PM = \frac{3\sqrt{3}}{32}$ 。而三角形

ACE 的面积为 $S_{\triangle ACE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AC^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，所以六边形 $PMROQN$ 的面积是

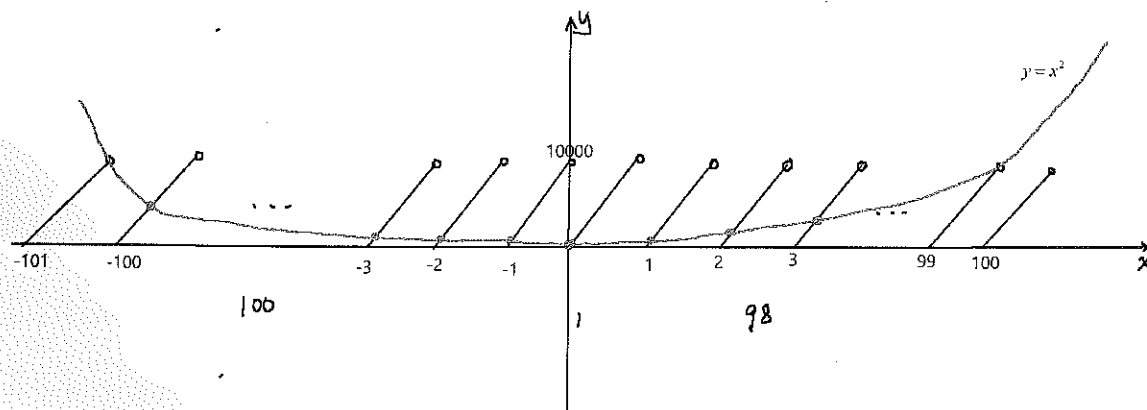
$$S_{PMROQN} = S_{\triangle ACE} - 3 \cdot S_{\triangle PAM} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{32} = \frac{15\sqrt{3}}{32}，选 C。$$

第 25 题

考点：代数（数形结合+地板函数）

关键思路解析：题目问的是解有多少个，如果把地板函数的图和抛物线的图画在同一张图里，确实不太容易找出有多少个交点。但是如果我们对方程进行重新整理，可以避免地板函数，如 $x^2 = 10000(x - \lfloor x \rfloor) = 10000\{x\}$ （符号 $\{x\}$ 表示取 x 的小数部分），而右侧的函数图像和抛物线的交点相对更容易看出来。

解答：我们把 $y = x^2$ 和 $y = 10000\{x\}$ 这 2 张图画在同一个坐标系里，得到，



从图中可以看到,一共有 199 个点.选择 C。

注意: 关于函数 $y=\{x\}$ 的画法,在 AMC10, AMC12 中文教材里有讲解,请参考教材。