

2019 AMC 10A 解答

第1题

考点：算术

解答： $2^{\binom{0}{19}} + \left((2^0)^1\right)^9$
 $= 1 + 1 = \boxed{2}$, 所以答案选 $\boxed{C}$.

第2题

考点：数论（结尾0的个数）

解答：20!的结尾0的个数为： $\left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5^2} \right\rfloor + \dots = 4$ 个，而15!的结尾0的个数为：

$\left\lfloor \frac{15}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{5^2} \right\rfloor + \dots = 3$ 个，因此相减后，百位数字为0，选A

第3题

考点：

解答：设今年Ana的年龄是A岁，Bonita的年龄是B岁，那么 $A - 1 = 5(B - 1)$,

且 $A = B^2$. 将第二个方程代入第一个得到， $B^2 - 1 = 5(B - 1)$. 解得， $B = 4$.

且 $A = B^2 = 16$. 那么 $16 - 4 = 12 \implies \boxed{(D)}$

第4题

考点：鸽笼原理

解答：我们考虑最差的情况，即首先取出9个黑球，11个白球，13个蓝球，14个黄球，14个绿球，14个红球，此时再继续取一个球，一定是红，绿，黄这3种中的一种颜色。因此至少需要取 $9+11+13+14+14+14+1=76$ 个球，选B。

第5题

考点：数论（不定方程）

解答：假设这些连续整数的第一个数是 x ，共有 n 个数，则

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + [x + (n-1)] = \frac{[2x + (n-1)]n}{2} = 45, \text{ 所以 } [2x + (n-1)]n = 90,$$

可以看到， n 应该是 90 的因子，而 90 的最大因子是 90，因此 n 最大为 90，此

时 $2x + (n-1) = 1$ ，即 $2x + (90-1) = 1$ ， $x = -44$ 是个整数。因此选 D。

第6题

考点：平面几何

解答：这道题等价于问，下面哪些四边形存在外接圆。因为外接圆的圆心到四个顶点的距离都相等。正方形，长方形和等腰梯形都存在外接圆，而其他都不存在。

因此选 (C) 3。

第7题

考点：解析几何（鞋带定理）

关键思路解析：要求坐标系里三角形的面积，首选 shoelace theorem(鞋带定理)。

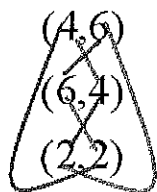
那么接下来我们只要求出三角形的三个顶点坐标就行了。

解答：

斜率为 $1/2$ ，过 $(2,2)$ 点的直线方程为 $y-2 = \frac{1}{2}(x-2)$ ，与 $x+y=10$ 联立方程组，得 $(6,4)$ 。

斜率为 2 ，过 $(2,2)$ 点的直线方程为 $y-2 = 2(x-2)$ ，与 $x+y=10$ 联立方程组，得 $(4,6)$ 。

目前三个点坐标都已知，运用鞋带定理，



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |(4 \times 4 + 6 \times 2 + 2 \times 6) - (6 \times 6 + 2 \times 4 + 2 \times 4)|$$

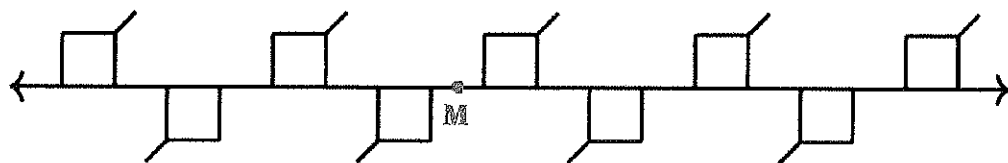
$$= 6$$

Answer: C

第8题

考点: 平面几何 (几何变换)

解答: 第一句是对的, 因为只需要原图形关于 A 上某个点中心对称即可。如下图中的 M 点。



第 2 句话也是对的。当将图形沿着 A 向左或向右移动, 使得直线 A 上方或下方的图形再次分别重合, 则图形就变换到了自身。

第 3 句话错的。关于直线 A 对称后, 所得图形和原来不同。

第 4 句话也错。因为原图形没有垂直于 A 的对称轴。

因此只有 (C) 2 句话是对的。

第9题

考点: 数论 (整除, 质数)

解答: 前 n 个正整数之和为 $\frac{(n+1)n}{2}$, 要使得 $\frac{(n+1)n}{2}$ 不能整除 $n!$ 的最大 n , 则将选项中的数字由大到小依次代入尝试即可。

若 $n=999$ ，则 $\frac{1000 \cdot 999}{2} = 999 \cdot 500$ 能够整除 $999!$ ，不符题意。

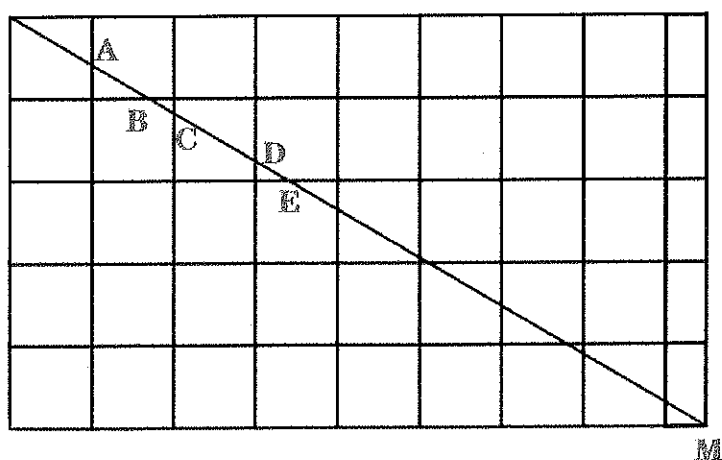
若 $n=998$ ，则 $\frac{999 \cdot 998}{2} = 999 \cdot 499 = 333 \cdot 3 \cdot 499$ 能够整除 $998!$ ，不符题意。

若 $n=997$ ，则 $\frac{998 \cdot 997}{2} = 997 \cdot 499$ 能够整除 $997!$ ，不符题意。

若 $n=996$ ，则 $\frac{997 \cdot 996}{2} = 997 \cdot 498$ 不能整除 $996!$ ，因为 997 是质数。因此答案选 C。

第 10 题

考点：找规律



解答：观察上图，当虫子每次碰到水平或竖直的网格线时，它总是多爬完一块瓷砖。如图中，到 A 点时，爬完第一块，到 B 点时，爬完第二块，到 C 点时，爬完第三块，...而在爬行过程中，总共需要穿过 10 条水平网格线以及 17 条竖直网格线。所以一共爬完 $10+17=27$ 块瓷砖。但是注意到，到 M 点时，同时穿过竖直线和水平线，但是只爬完一块瓷砖，因此瓷砖数多计算 1 次，实际爬过的瓷砖数为 $27-1=26$ 块，选 C。

第 11 题

考点：数论（因子个数定理）

关键思路分析:根据我们上面总结的找完全平方和完全立方因子的方法,即可.不过要记得,还有的数是两者同时都是,比如 3^6 .

解答: $3^9 \times 67^9 = 3 \times 67 (3^4 67^4)^2 = (3^3 \times 67^3)^3 = 3^3 \times 67^3 (3 \times 67)^6$. 所以约数是完全平方数的有 $(4+1)(4+1)=25$ 个,而约数是立方数的有 $(3+1)(3+1)=16$ 个.而约数既是平方又是立方(即是六次方)的有 $(1+1)(1+1)=4$ 个.因此约数是平方,或者立方,或两者均是有的有 $25+16-4=37$ 个.选 C.

第 12 题

考点:数据分析(平均数,中位数,众数)

解答:这组数据总共 365 个数,中位数为第 $\frac{365+1}{2}=183$ 个数,第 183 个数是 16,

所以 $M=16$. 这组数据的众数为 1,2,3,4, ..., 28, 这些众数的中位数是

$d = \frac{14+15}{2} = 14.5$. 因为在计算平均数 μ 时,比计算 d 时多考虑了 29,30,31, 因此

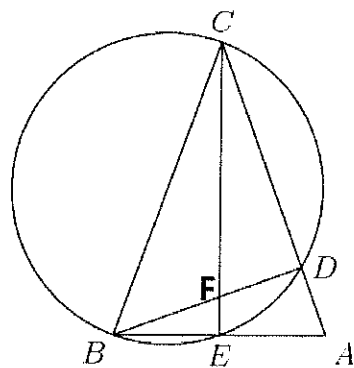
$\mu > d$; 另一方面,如果将这组数中的 29, 30 和 31 均变为 12 个,那么整组数据的

中位数和平均值将相等,均为 16.但实际上 29,30 和 31 少于 12 个,因此导致实

际的平均数 $\mu < 16 = M$. 因此 $d < \mu < M$, 选 E.

第 13 题

考点:平面几何(圆)



关键思路解析: $\angle BFC = \angle BDC + \angle ECA$, 而因为 BC 为直径, 所以 $\angle BDC = 90^\circ$.

而 $\angle ECA = \frac{1}{2}\angle BCA = 20^\circ$, 因为 $BC=AC$, 且 $CE \perp AB$ (BC 是直径). 那么

$$\angle BFC = \angle BDC + \angle ECA = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ.$$

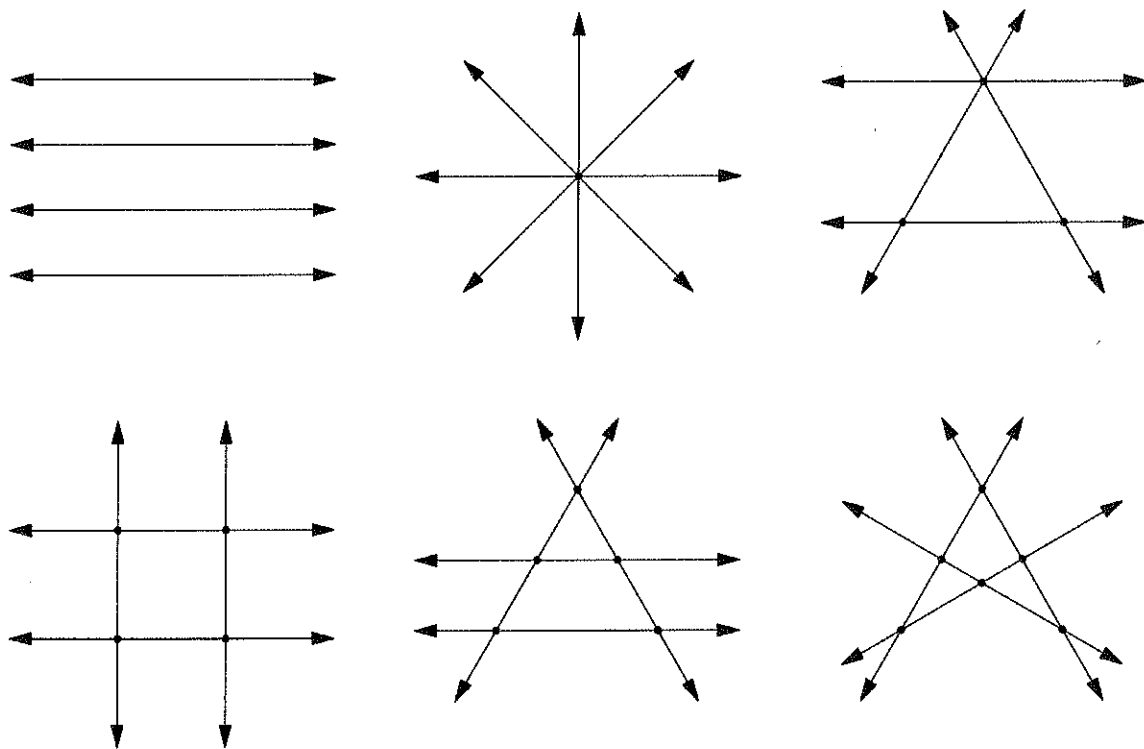
Answer: D

第 14 题

考点: 平面几何

解答: 题目实际上问的是, 平面内的 4 条直线的交点个数的所有可能性。最多有

$C_4^2 = 6$ 个交点。如下图, 除了交点个数为 2 的不可实现, 其他均可实现:



因此 N 的所有可能值是 0, 1, 3, 4, 5, 6, 它们的和

为 $0 + 1 + 3 + 4 + 5 + 6 = \boxed{(D) 19}$.

第 15 题

考点：数列（等差数列）

解答：这个递推式是分式，但是若取倒数，则右边可以裂成 2 项，至少可以重新

整理发现其中规律。所以我们先做这样的尝试。 $\frac{1}{a_n} = \frac{2a_{n-2} - a_{n-1}}{a_{n-2} \cdot a_{n-1}} = \frac{2}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}}$ ，这样

我们重新整理成， $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}}$ 。我们可以把 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 看成一个新的数列 $\{b_n\}$ ，

则 $b_n - b_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}$ ，说明数列 $\{b_n\}$ 是一个等差数列。 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$ ，公差

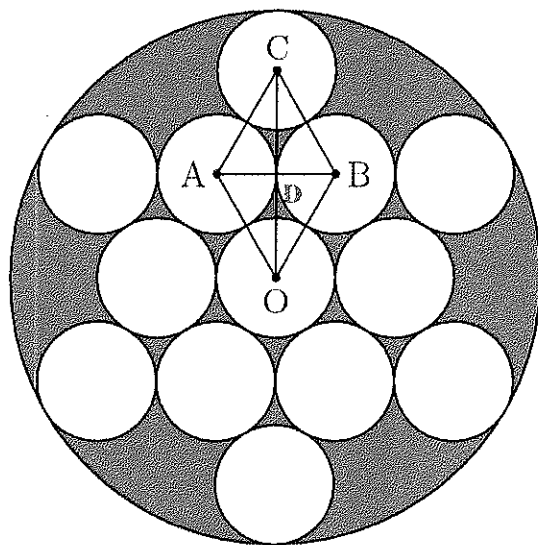
$d = b_2 - b_1 = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$ ，所以 $b_n = b_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3}$ ，即

$\frac{1}{a_n} = \frac{4n-1}{3}$ ，因此， $a_n = \frac{3}{4n-1}$ ，则 $a_{2019} = \frac{3}{4 \times 2019 - 1} = \frac{3}{8075}$ ， $p+q=8078$ 。

Answer: E

第 16 题

考点：平面几何（特殊直角三角形）



解答：我们只要求出大圆的半径，问题便得以解决。如上图， $\triangle ABC$ 是个边长

为2的等边三角形,而 $CO \perp AB$ 于D,所以直角 $\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = 30^\circ$,而 $AC = 2$,因此 $CD = \sqrt{3}$ 。 $CO = 2 \cdot CD = 2\sqrt{3}$,那么大圆的半径为 $R = 2\sqrt{3} + 1$ 。因此阴影部分面积是: $S = \pi R^2 - 7 \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi(2\sqrt{3} + 1)^2 - 13\pi = 4\sqrt{3}\pi$,选A。

第17题

考点: 排列组合(带有重复的排列)

关键思路解析: 这是个带有重复的排列,因为颜色相同的不加以区分。我们可以先算出9个方块总共有多少种不同的排列。这些排列的每一种,取前面8个方块,便得到题目需要的排列。

解答: 9个方块形成的不同排列有: $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6 \times 2} = 1260$

Answer: D

第18题

考点: 数论(循环小数)

关键思路解析: 根据题目意思,列出方程: $\left(\frac{7}{51}\right)_{10} = (0.\overline{23})_k$,下面要做的工作,就是

利用前述方法,将右边k进制的循环小数,转化成10进制即可。

解答: 现在把 $(0.\overline{23})_k$ 转化成10进制数,设 $(0.\overline{23})_k = x$,左边小数点向右移动2位,

得到, $(23)_k + x = k^2 x$, $x = \frac{(23)_k}{k^2 - 1} = \frac{2k + 3}{k^2 - 1}$,所以, $\frac{7}{51} = \frac{2k + 3}{k^2 - 1}$,解得, $k = 16$ 。

Answer: D

第19题

考点: 代数(二次函数)

解答: 将表达式 $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 2019$ 的第1个和第4个括号

相乘并展开,第2个和第3个括号相乘并展开,得到

$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 2019$ 。令 $x^2 + 5x + 5 = k$, 则式子化为,

$(k-1)(k+1) + 2019 = k^2 + 2018$ 。当 $k=0$ 时, 此表达式取最小值 **(B) 2018**。并

且当 $k=0$ 时, 方程 $x^2 + 5x + 5 = 0$ 是有解的, 因此 $k=0$ 可以取到。因此答案为

(B) 2018。

第20题

考点: 排列组合

关键思路解析: 因为每行每列的三个数加起来是奇数(odd). 3个数加起来是奇数, 只可能其中1个是奇数或者这3个都是奇数. 但是我们只有1,3,5,7,9这5个奇数, 要分配给3行, 这三行只可能其中一行有3个奇数, 其余2行分别得到1个奇数. 3列也是. 所以下面安排这9个数可以分2步:

第一步: 先根据奇偶性(parity)安排每个格子应该得到偶数还是奇数. 第二步, 把数字填入.

解答:

第一步: 先根据奇偶性(parity)安排每个格子应该得到偶数还是奇数. 如下表, 先看行. 其中一行有3个奇数, 所以是从3行里选择1行放入三个奇数, 共有3种方法. 比如第一行全部是奇数, 剩余2个奇数(称为A和B)放入第二和第三行. 然后决定哪一列放入3个奇数, 3列里选择一列, 有3种方法. 比如放入第二列. 那么我们就把剩余的2个奇数A和B全部填入第二列, 如下表, 总共 $3 \times 3 = 9$ 种可能的填法.

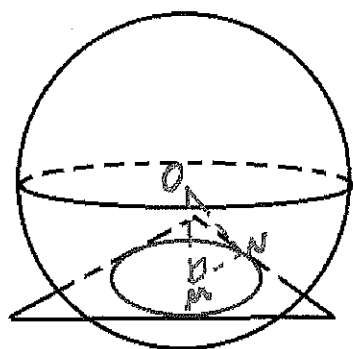
奇数	奇数	奇数
偶数	奇数	偶数
偶数	奇数	偶数

第二步: 把 1,3,5,7,9 这 5 个数字填入标有奇数的格,这是个全排列问题,一共 $5!$ 种方法.剩下的 4 个偶数全部填入剩下格子,一共有 $4!$ 种方法.而总共把 9 个数字填入 9 个格子,一共有 $9!$ 种方法.所以概率为 $P = \frac{9 \times 5! \times 4!}{9!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{14}$

Answer: B

第 21 题

考点: 立体几何 (球) + 平面几何 (三角形内切圆的半径公式)



分析: 这是一道立体几何的问题,立体几何的问题一般都是通过截面转化成平面几何,用平面几何的方法解决.过球心向三角形平面作投影 M, M 即为三角形内切圆的圆心.设球和三角形平面的切点之一为 N,在直角三角形 OMN 内,用勾股定理即可得到球心到平面的距离 OM. ON 为球半径, MN 为内切圆的半径.接下来求三角形内切圆半径即可。

解答: 先求三角形内切圆半径.由三角形内切圆半径公式:

$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}$. 而 15, 15, 24 的等腰三角形面积为: $\frac{1}{2} \times 24 \times 9 = 108$. 半周长为

27, 所以内切圆半径为 $r = 108/27 = 4$. 即 $MN = 4$. 又 $ON = 6$, 则 $OM = 2\sqrt{5}$.

Answer: D

第 22 题

考点: 概率 (分类讨论, 几何概型)

解答: 如果第一次是正面朝上, 我们将后面选择数的方法称为方法 1, 若第一次是背面朝上, 则将后续选择数的方法称为方法 2. 所选择的两个数 x 和 y 可能来自于同一个方法, 也可能来自于不同的方法. 所以我们需要分类讨论.

1. 若 x 和 y 均来自于方法 1. 为了满足不等式 $|x-y| > 1/2$, 则

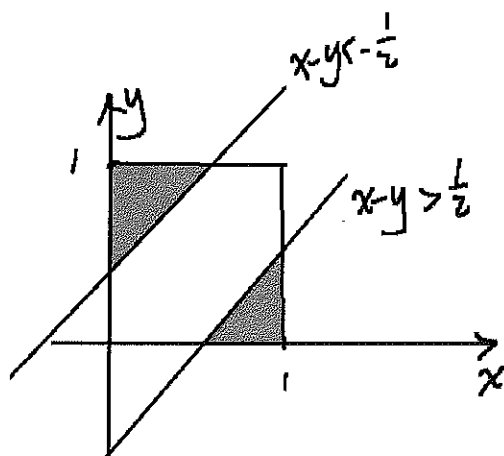
$x=1, y=0$, 概率为 $1/4 \times 1/4 = 1/16$.

或者 $x=0, y=1$, 概率为 $1/4 \times 1/4 = 1/16$.

因此这种情况的总概率为 $P_1 = \frac{2}{16}$.

2. 如果 x 和 y 都来自于方法 2.

因为 x 和 y 都是连续型随机变量, 所以变成了几何概型, 需要用几何图形求概率.



因为 $|x-y| > 1/2$, 则 $x-y > \frac{1}{2}$ 或 $x-y < -\frac{1}{2}$, 分别表示点 (x,y) 在直线 $x-y = \frac{1}{2}$ 的下方

区域以及直线 $x-y=-\frac{1}{2}$ 的上方区域。而 x, y 均在 $[0, 1]$ 内取值, 所以还需包含在正方形以内, 如上图阴影部分所示。而阴影部分占了正方形面积的 $\frac{1}{4}$, 所以这种情况的总概率为 $P_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ 。

3. (i) x 可能选自方法 1, y 可能选自方法 2; (ii) 或者 x 可能选自方法 2, y 可能选自方法 1。

对于第(i)种情况, 若 $x=1$, 那么 y 应该是 0 到 $\frac{1}{2}$ 之间的一个数。概率为 $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$;

而若 $x=0$, 则 y 应该是 $\frac{1}{2}$ 到 1 之间的一个数。概率为

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ 。因此对于第(i)种情况, 概率为 $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$ 。

第(ii)种情况的概率和第一种相同, 也为 $\frac{2}{16}$ 。因此总的概率为 $P_3 = \frac{4}{16}$ 。

综上, 三种情况的总概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{7}{16}$, 选 B。

第 23 题

考点: 等差数列

关键思路解析: 这个游戏是 3 人依次说完为一个回合。若我们只关心 Tadd 说的数, 在第 1 回合, 他说 1 个数, 第 2 个回合, 他说 4 个数, 第 3 个回合, 他说 7 个数, 由此得到, 他在每个回合说的数的个数成等差数列。那么我们首先需要确定他说的第 2019 个数是在第几个回合。然后把前 $n-1$ 个回合 3 人总共说的数的个数算出来, 向后推, 推出 Tadd 说的第 2019 个数即可。

解答: Tadd 每回合说的数的个数是 1 为第一项, 公差为 3 的等差数列。因此第 n 个回合他说了 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n-2$ 个数, 到第 n 个回合为止总共说了

$S_n = \frac{(1+3n-2) \cdot n}{2} = \frac{(3n-1) \cdot n}{2}$, 当 $n=37$ 时, $S_{37} = \frac{(3 \cdot 37-1) \cdot 37}{2} = 2035$; 当 $n=36$ 时, $S_{36} = \frac{(3 \cdot 36-1) \cdot 36}{2} = 1926$, 所以, Tadd 所说的第 2019 个数发生在第 37 回合,

而第 36 回合结束, 他总共说了 1926 个数。下面我们算出前 36 个回合, 3 个

人总共说了多少数: $(1+2+3)+(4+5+6)+\dots+(\dots+36\times 3)=\frac{(108+1)\cdot 108}{2}=5886$, 即

第 36 回合末尾的数是 5886, 此时再往后推 $(2019-1926)=93$ 个数, 就是 Tadd 第

2019 次说的数, 这个数是 $5886+93=5979$

Answer: C

第 24 题

考点: 多项式 (韦达定理)

解答: $x^3 - 22x^2 + 80x - 67 = (x-p)(x-q)(x-r)$, 所以原式变形为:

$$\frac{1}{(x-p)(x-r)(x-q)} = \frac{A}{s-p} + \frac{B}{s-q} + \frac{C}{s-r}, \text{进一步变形}$$

为, $1 = A(s-q)(s-r) + B(s-p)(s-r) + C(s-p)(s-q)$. 令 $s=p$, 求出

$$\frac{1}{A} = (p-q)(p-r), \text{同理可得, } \frac{1}{B} = (q-p)(q-r), \frac{1}{C} = (r-q)(r-p). \text{所以}$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = (p-q)(p-r) + (q-p)(q-r) + (r-q)(r-p)$$

$$= p^2 - pr - pq + qr + q^2 - qr - pq + pr + r^2 - pr - qr + pq$$

$$= p^2 - pr - pq + q^2 + r^2 - qr$$

$$= (p+q+r)^2 - 3(pr+pq+qr)$$

而由韦达定理, $p+q+r=22$, 且 $pq+qr+pr=80$, 所以

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = (p+q+r)^2 - 3(pr+pq+qr) = 22^2 - 240 = 244$$

Answer: B

第 25 题

考点: 数论 (威尔逊定理) + 排列组合 (分组方法)

关键思路解析: 这个式子的形式和我们在排列组合里学到的分组公式非常的类似,

做适当的联想, 可以把这个式子理解成: 将 n^2 个不同的物体分成 n 组, 每组 n 个,

总共的方法数为: $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$, 这是个整数. 而 $\frac{(n^2-1)!}{(n!)^n} = \frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} \cdot \frac{n!}{n^2}$, 所以现在只需要

$\frac{n!}{n^2} = \frac{(n-1)!}{n}$ 为整数, 即, $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$. 下面运用威尔逊定理即可。

解答: 因为 $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$, 根据威尔逊定理, n 一定不是质数, 否

则, $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$. 所以我们只需要检验 1-50 中的合数(composite number)以及

1 即可.

当 $n=1$ 时, 题目中的那个式子是个整数, 符合题目要求.

当 n 为合数时, 分为 2 种情况:

1. n 不是个完全平方数(perfect square), 则 $n = a \cdot b$, $0 < a < n, 0 < b < n, a \neq b$ 所以

$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a \cdots b \cdots (n-1) \equiv 0 \pmod{n}$ 符合要求。

2. $n = a \cdot a$ 是完全平方. 因为 $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots a \cdots 2a \cdots 3a \cdots (n-1) \pmod{n}$, 所以当

$n > 2a$, $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots a \cdots 2a \cdots 3a \cdots (n-1) \equiv 0 \pmod{n}$; 然而当 $n = 2a$ 时, 也就是

$a=2, n=4$ 时, $(4-1)! \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{4}$, 不符合题目要求。所以所有合数里, 只有 4

不符合题目要求.

1-50 中, 扣除所有质数以及 4 之后, 还剩 34 个.

Answer : D