

2019 AMC 10B 解答

第1题

考点：比例

解答：假设第一个容器的容积是 A ，第二个容器的容积是 B 。由题意， $\frac{3}{4}A = \frac{5}{6}B$ 。

因此得到， $\frac{A}{B} = \frac{(\frac{3}{4})}{(\frac{5}{6})} = \boxed{\text{(D)} \frac{9}{10}}$ 。

第2题

考点：逻辑推理

解答：我们要寻找的反例是符合“如果 n 不是质数，那么 $n-2$ 不是质数”的数。选项中只有 E 符合，因为 27 不是质数，而 $27-2=25$ 也不是质数。选 E。

第3题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：60%的高三生不会演奏乐器。假设高三生总人数为 x 人，那么

$$\frac{3}{5}x + \frac{3}{10} \cdot (500 - x) = \frac{468}{1000} \cdot 500,$$

$$\frac{3}{5}x + 150 - \frac{3}{10}x = 234,$$

$$\frac{3}{10}x = 84$$

$$x = 84 \cdot \frac{10}{3} = 280$$

因此非高三学生有 $500 - x = 220$ 人。因为有 70% 的非高三学生会演奏乐器，

因此会演奏乐器的非高三学生有 $220 \cdot \frac{7}{10} = \boxed{\text{(B)} 154}$ 人。

第4题

考点：等差数列

解答：因为 a, b, c 成等差数列，所以 $a + c = 2b$ ，即 $a \cdot (-1) + b \cdot 2 = c$ ，和直线方程对照可以看到，直线总是过点 $(-1, 2)$ ，所以选 A。

第5题

考点：平面几何（几何变换）

解答：首先我们必须知道，点 (x, y) 关于直线 $y = x$ 的对称点为 (y, x) ，且 $y = x$ 这条直线是原来的点和对称点连线的垂直平分线。

对于 A，若 (x, y) 在第一象限，则 $x > 0, y > 0$ ，其对称点 (y, x) 也一定在第一象限，因此 A 一定正确。

对于 B，对称不会改变图形的面积，因此一定正确。

对于 C，因为原来的点和对称点的连线垂直于 $y = x$ ，而直线 $y = x$ 的斜率为 1，则 AA' 斜率为 -1，一定正确。

对于 D，同理， CC' 的斜率也为 -1，因此一定正确。

对于 E，举反例：如 $A(1, 2), B(2, 4)$ ，那么 $A'(2, 1), B'(4, 2)$ ，所以直线 AB 的斜率为 2，直线 $A'B'$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，而两者的乘积不为 -1，所以两直线不垂直。

答案选 E。

第6题

考点：算术

解答：

$$\begin{aligned}
 (n+1)n! + (n+2)(n+1)n! &= 440 \cdot n! \\
 \Rightarrow n![n+1 + (n+2)(n+1)] &= 440 \cdot n! \\
 \Rightarrow n+1 + n^2 + 3n + 2 &= 440 \\
 \Rightarrow n^2 + 4n - 437 &= 0
 \end{aligned}$$

继续分解因式, 为 $(n+23)(n-19)=0$, $n=19$, 因此 $1+9 = \boxed{(C) 10}$ 。

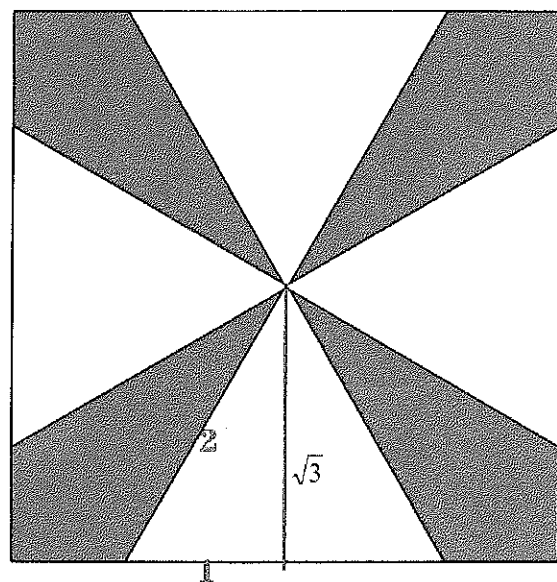
第7题

考点: 数论 (最小公倍数)

解答: 假设 Casper 一共有 x 分钱, 可以购买 a 块红色, 或 b 块绿色, 或 c 块蓝色, 或 n 块紫色, 则有 $x=12a=14b=15c=20n$, 可以看到, x 至少是 12, 14, 15, 20 的最小公倍数, $x = LCM(2^2 \times 3, 2 \times 7, 3 \times 5, 2^2 \times 5) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$, 所以 n 最小为 $n = \frac{x}{20} = 21$, 选 B。

第8题

考点: 平面几何 (等边三角形)



解答: 容易算出, 等边三角形的高为 $\sqrt{3}$, 因此正方形的边长为 $2\sqrt{3}$, 那么正方形的面积为 $(2\sqrt{3})^2 = 12$, 而 4 个边长为 2 的等边三角形的面积为 $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = 4\sqrt{3}$,

所以阴影部分的面积是 $12-4\sqrt{3}$ ，选 B。

第 9 题

考点：地板函数

解答：这里我们分 $x>0$, $x<0$ 和 $x=0$ 这 3 种情况对 $f(x)$ 进行讨论。

当 $x>0$, $f(x) = \lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 0$;

当 $x<0$ 且是个分数时, 则 $f(x) = \lfloor -x \rfloor - \lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor - (\lfloor -x \rfloor + 1) = -1$;

当 $x<0$ 且是个整数时, 则 $f(x) = \lfloor -x \rfloor - \lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor - |x| = -x - (-x) = 0$;

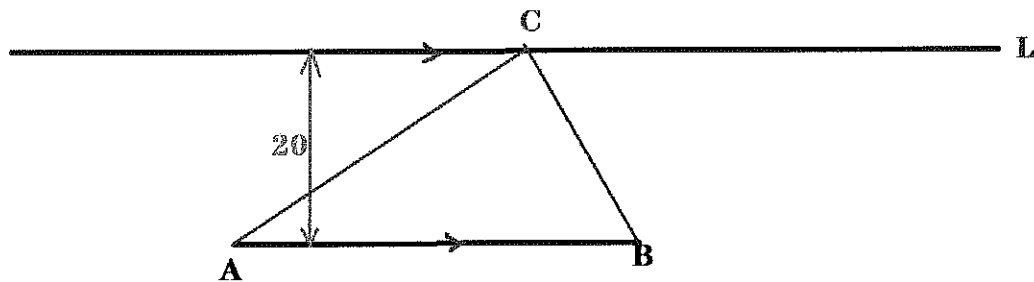
当 $x=0$ 时, $f(x) = 0$. 因此 f 的值域为 $\{0, -1\}$.

Answer: A

第 10 题

考点：平面几何

解答：



因为 $AB=10$ ，而 $\triangle ABC$ 面积为 100，则 AB 上的高为 20，表明 C 点位于平行于 AB 且和 AB 距离为 20 的直线 L 上。因此 $AC \geq 20, BC \geq 20$ ，但是两者不能同时取到等号，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $AC + BC + AB > 20 + 20 + 10 = 50$ ，不可能等于 50，因此这样的 C 点有 0 个，选 A。

第 11 题

考点：代数（列方程解应用题）

解答：假设两个罐子都有 k 个玻璃球，那么第一个罐子中，蓝色和绿色分别为 $\frac{9}{10}k, \frac{1}{10}k$ 个。在第二个罐子中，蓝色和绿色分别为 $\frac{8}{9}k, \frac{1}{9}k$ 个。而两个罐子绿色共 95 个，所以 $\frac{1}{10}k + \frac{1}{9}k = 95$ ，解得， $k = 450$ ，那么第一个罐子蓝色玻璃球比第二个罐子的蓝色玻璃球多 $\frac{9}{10}k - \frac{8}{9}k = 405 - 400 = 5$ 个，选 A。

第 12 题

考点：数论（进制）

关键思路解析：要尽可能数字之和最大，那么各个位上的数字尽可能多的是 6。那么最多是多少个 6 呢？首先要弄清楚比 2019 小的整数，用 7 进制表示，最多表示成多少位？由这个最多的位数，先把每位上都安排 6，如果超过 2019，再从高位到低位依次把 6 往下降，直到小于 2019 即可。

解答：因为 $(6666)_7 = (7^4 - 1)_{10} = 2400 > 2019$ ，所以先将最高位 6 降为 5，变成 $(5666)_7 = 2057 > 2019$ ，再降成 4（或者降十位上的数字也可以），变成 $(4666)_7 = 1714 < 2019$ ，符合题意。所以各位上数字之和最大为 22。

Answer: C

第 13 题

考点：数据分析

解答：平均数为 $\frac{4 + 6 + 8 + 17 + x}{5} = \frac{35 + x}{5}$ 。当 x 取不同的值时，这列数

的中位数不同。下面分类讨论：

①当 $x \leq 6$ 。则这组数的中位数是 6，那么有 $\frac{35+x}{5} = 6$ ，解得 $x = -5$ ，满足 $x \leq 6$ 这个条件。因此 $x = -5$ 是合理的。

②当 $6 < x \leq 8$ 。则这组数的中位数是 x ，那么有

$\frac{35+x}{5} = x \implies 35+x = 5x \implies x = \frac{35}{4} = 8.75$ ，不满足 $6 < x \leq 8$ 这个条件。因此不合理。

③当 $x > 8$ 。则这组数的中位数是 8，那么有 $\frac{35+x}{5} = 8$ ，解得 $x = 5$ ，不满足 $x > 8$ 这个条件。因此也不合理。

综上， x 的唯一可能值是 (A) - 5。

第 14 题

考点：数论（结尾 0 的个数+整除规则）

关键思路分析：这个数字能同时被 9, 10, 11 整除，运用前述规则去判断即可。

解答：首先需要看结尾有多少个 0。

$\left\lfloor \frac{19}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{19}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{19}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{19}{5^4} \right\rfloor + \dots = 3$ ，所以 $H=0$ 。因为能被 9 整除，所以把各个位

数字加起来，得 $33+T+M \equiv 0 \pmod{9}$ ，即， $T+M \equiv 3 \pmod{9}$ 。因为能被 11

整除，所以， $M-T \equiv 4 \pmod{11}$ 。所以 $T+M=3$ or 12 ， $M-T=4$ or 15

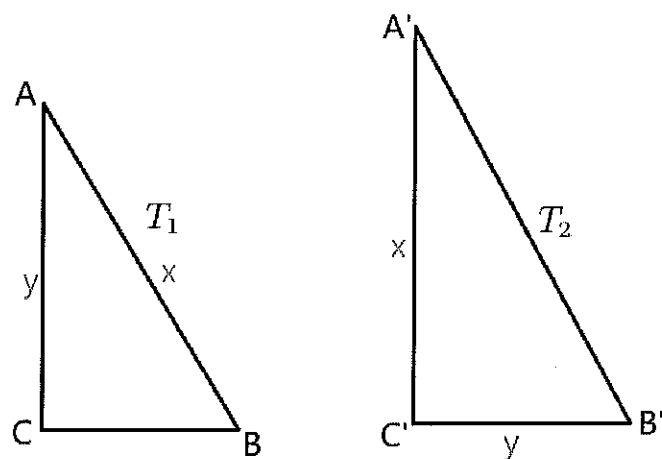
其中合理的解只有 $M=8$ ， $T=4$ 。 $T+M+H=12$ 。

Answer : C

第 15 题

考点：平面几何（勾股定理）

关键思路解析：这道题的难点在于，要自己去判断这2个直角三角形中，到底是哪2条边对应相等。



如上图，一定不可能是2对直角边对应相等，不然这2个三角形就全等(congruent)，面积也相等了，矛盾。所以应该是一条直角边对应一条斜边(hypotenuse)相等。假设 $AC = C'B' = y$, $AB = A'B' = x$ ，则根据题意，列出关于 x, y 的方程，后面就容易解决了。

解答：由面积分别是1和2，得到

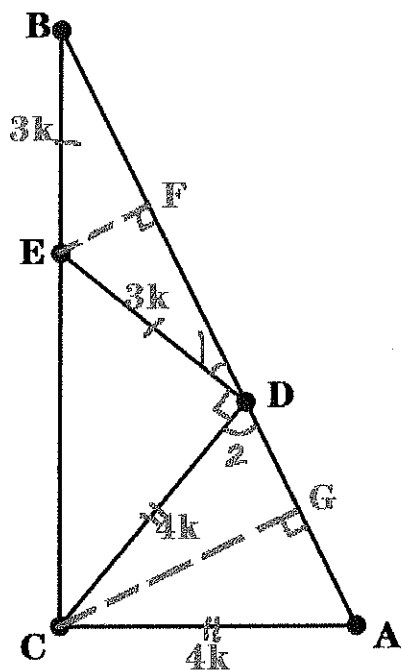
$$\begin{cases} xy = 4 \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 2 \end{cases}, \begin{cases} x^2 y^2 = 16 \\ y^2(x^2 - y^2) = 4 \end{cases} \quad \text{设 } x^2 = m, y^2 = n, \text{ 则 } \begin{cases} mn = 16 \\ n(m - n) = 4 \end{cases} \text{ 得到 } \begin{cases} m^2 = \frac{64}{3} \\ n^2 = 12 \end{cases}$$

$$\text{现在要求的是, } BC^2 \times A'B'^2 = (m - n) \cdot (m + n) = m^2 - n^2 = \frac{64}{3} - 12 = \frac{28}{3}$$

Answer : A

第16题

考点：平面几何（等腰三角形，直角三角形）



解答:如上图所示,过E作 $EF \perp BD$ 于F,过C作 $CG \perp AB$,因为 $AC : DE = 4 : 3$,

设 $AC = CD = 4k$, $ED = BE = 3k$ 。而 $\angle 1 = \angle B, \angle 2 = \angle A$, 因此

$\angle 1 + \angle 2 = \angle B + \angle A = 90^\circ$, 那么 $\angle EDC = 90^\circ$ 。所以 $EC = 5k$, $BC = 8k$, 则

$BC = 4\sqrt{5}k$ 。 $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 所以在直角

$\triangle BEF$ 中, $BF = BE \cdot \cos B = 3k \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6k}{\sqrt{5}}$, $BD = 2 \cdot BF = \frac{12k}{\sqrt{5}}$; 在直角 $\triangle CDA$ 中,

$AG = AC \cdot \cos A = 4k \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4k}{\sqrt{5}}$, $AD = 2 \cdot AG = \frac{8k}{\sqrt{5}}$ 。因此 $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$, 选 A。

第 17 题

考点: 概率 (考虑反面)

关键思路解析: 红球投入的编号比绿球高, 和绿球投入的编号比红球高, 这 2 个事件(event)的概率是一样的, 所以我们只需要算出这 2 个事件的反面, 即, 红球投入的编号和绿球一样, 再用 1 减去这个概率, 最后除以 2, 就得到所要求的概率。

解答：红球和绿球可能都投入 1，或者 2，或者 3，...那么概率为：

$$P_1 = 2^{-1} \cdot 2^{-1} + 2^{-2} \cdot 2^{-2} + 2^{-3} \cdot 2^{-3} + \dots$$

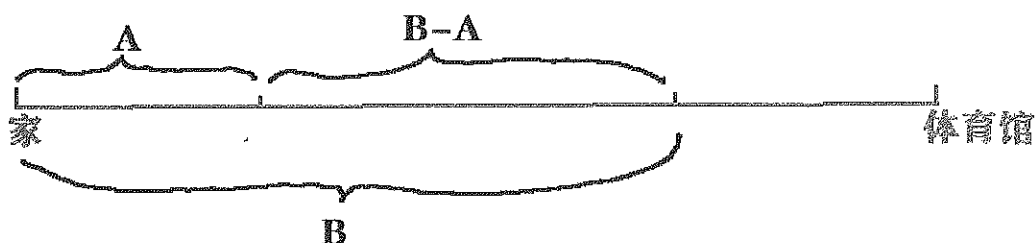
$$= \frac{2^{-2}}{1-2^{-2}} = \frac{1}{3}$$

那么所要求的概率为

$$P = \frac{1-P_1}{2} = \frac{1}{3}$$

Answer: C

第 18 题



当 Henry 朝着体育馆走时，他走过的距离为 $B-A$ ，占了 $2-A$ 的 $\frac{3}{4}$ ，即

$B-A = \frac{3}{4}(2-A)$ ；当他朝着家方向走时，他走过的距离仍然是 $B-A$ ，占了 B 的 $\frac{3}{4}$ ，

即 $B-A = \frac{3}{4}B$ 。解这两个方程组成的方程组，得到， $A = \frac{2}{5}$ ， $B = \frac{8}{5}$ ，那么 $|A-B| = \frac{6}{5}$ ，

选 C。

第 19 题

考点：数列（因子个数定理）

解答：因为 S 中的元素都是 $100,000 = 10^5$ 的正因子，所以任意两个不同的元素的

乘积都是 $10^5 \times 10^5 = 10^{10}$ 的因子。而 $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$ ，所以 10^{10} 共有 $11 \cdot 11 = 121$ 个正因

子。然而有些正因子只能由 S 中两个相同的数相乘得到，它们是 $1, 10^{10}, 5^{10}, 2^{10}$ ，

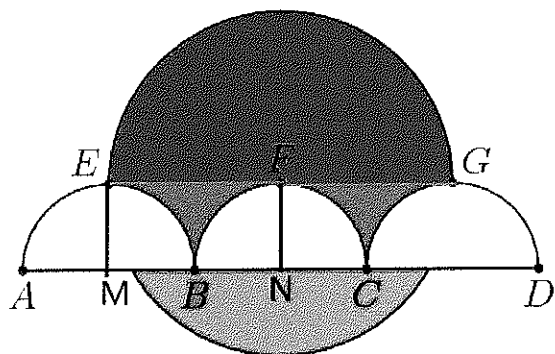
分别只能由 $1 \times 1, 10^5 \times 10^5, 5^5 \times 5^5, 2^5 \times 2^5$ 相乘得到，因此只有 $121 - 4 = 117$ 个因子可

以由 S 中两个不同的元素相乘得到，选 C。

第 20 题

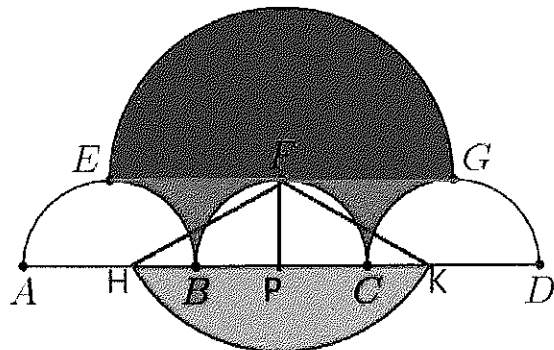
考点：平面几何（特殊直角三角形）

关键思路解析：如果是把大圆的面积减去白色部分得到灰色部分面积，白色的面积其实不太方便算。我们这里可以直接求灰色部分的面积，把灰色部分分成如下 3 部分：



一个是最上面的半圆，中间 2 块类似三角形的部分和最下面月牙形部分。这 3 块面积都容易求得。

解答： 半圆部分面积： $\frac{1}{2}\pi \times 4 = 2\pi$ ；类似三角形部分面积：长方形的面积进去两块白色 $1/4$ 圆的面积，再乘以 2，得到 $(2 - \frac{\pi}{2}) \times 2 = 4 - \pi$ 。月牙形面积可由扇形面积减去三角形 FHK 面积得到，如下图



注意,直角三角形 HPF 中, 因为 $FP=1=1/2FH$, 所以是一个 30-60-90 的直角三角

形, 那么 $\angle HFP=60^\circ$, 则 $\angle HFK=120^\circ$, 所以月牙面积为:

$$\frac{\pi \cdot 4}{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 120^\circ = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

那么总的面积为:

$$\begin{aligned} 2\pi + 4 - \pi + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \\ = \frac{7\pi}{3} + 4 - \sqrt{3} \end{aligned}, \text{ 则 } a+b+c+d=17.$$

Answer: E

第 21 题

考点: 概率 (分类讨论)

关键思路解析: 根据题目意思, 在出现 HH 之前, 前面都是 THTH... 间隔出现.

列出前 3 个结果如下所示:

THTHH

THTHTHH

THTHTHTHH

这样我们就找到规律了: 每一种结果, 前 3 次总是 THT, 最后 2 次总是 HH, 中间

可以插 0 个, 1 个, 2 个... HT, 下面算出每种情况的概率, 然后再相加, 是个等比数

列.

解答: 概率为

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \dots \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{32} \times \frac{4}{3} \\
 &= \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

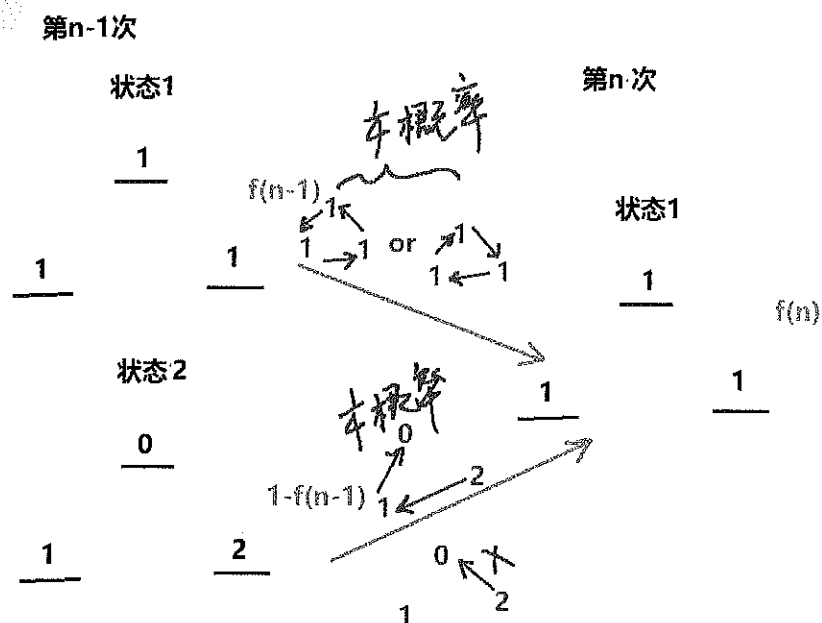
Answer : B

第 22 题

考点：概率（递推法）

关键思路解析：经过 2019 次，这中间会经历非常多的可能性，我们无法一一列举，然后算出每种可能性再相加，这不现实。但是我们看下这 3 人可能的状态，却只有 2 种，要么 3 人一人一个硬币（状态 1），要么 3 人中，1 人没硬币，另外 2 人分别持有 1 枚和 2 枚硬币（状态 2）。不可能会出现 1 人持有 3 枚硬币，因为他要给出 1 枚。因此我们只要算出从状态 1，经过 2019 次回合后，回到状态 1 的概率即可。这里采用递推，假设经过 n 次后，由状态 1 回到状态 1 的概率为 $f(n)$ ，那么回到状态 2 的概率就为 $1-f(n)$ 。下面只要找出递推公式求出 $f(2019)$ 即可。

解答：



如上图所示, 由第 $n-1$ 次的状态 1 回到第 n 次的状态 1, 只能按照图示 2 种方法进行(逆时针或者顺时针轮流给旁边的人), 共 $1/4$ 概率; 由第 $n-1$ 次的状态 2 回到第 n 次的状态 1, 只能按照图示方法给: 持有 2 枚硬币的人给出 1 枚给持有 1 枚硬币的人, 而持有 1 枚硬币的人给没有硬币的人 1 枚硬币, 原先没有硬币的人不用给, 概率为 $1/4$, 所以得到下面递推关系式:

$$f(n) = \frac{1}{4} \times f(n-1) + \frac{1}{4} (1 - f(n-1))$$

因此,

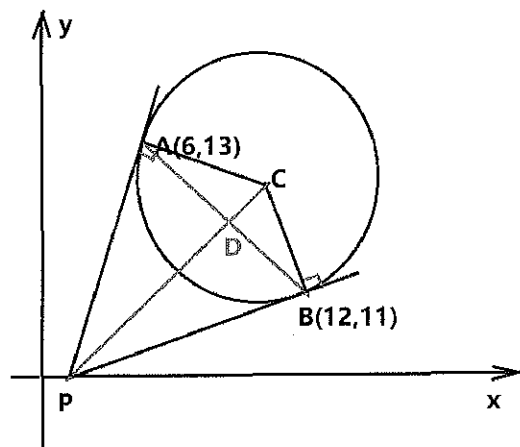
$$f(n) = \frac{1}{4}$$

与 n 无关. 所以 $f(2019) = 1/4$.

Answer : B

第 23 题

考点: 解析几何 (圆)



关键思路解析: 我们可以用中点公式求出 D 点的坐标, 因为 $CP \perp AB$, 而 AB 的斜率(slope)是知道的, 所以 CP 的斜率也已知, 结合 D 的坐标已知, 那么 CP 的直线方程就已知, 那么 P 点的坐标也就知道了. 由于 P, D, A 三点坐标都已知, 利用三角函数或者相似三角形, 在直角三角形 PAC 中, 可以知道半径.

解答: D(9, 12), AB 的斜率为: $k_{AB} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$, 因此 CP 的斜率为 3. 那么 CP 的直线方程为: $y - 12 = 3(x - 9)$, 令 $y = 0$, 则 $x = 5$. $P(5, 0)$. $PA = \sqrt{1 + 169} = \sqrt{170}$,

$PD = \sqrt{16 + 144} = 4\sqrt{10}$, 得, $\cos \angle APD = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{170}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\tan \angle APD = \frac{1}{4}$, 那么在

直角三角形 APC 中, $R = AC = PA \cdot \tan \angle APD = \sqrt{170} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{170}}{4}$, 面积为:

$$A = \pi R^2 = \frac{170\pi}{16} = \frac{85\pi}{8}$$

Answer: C

第 24 题

考点: 数列 (不动点方法)

关键思路解析: 对于这种分式类型, 我们可以采用不动点法. 利用分式递推不断求出 x_n , 最后 x_n 要么趋向于一个不动点, 要么趋向于正负无穷大 (到底哪种情况取决于 x 的初始值). 不动点的计算可以通过以下方法:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 6} \end{cases}$$

把递推式的左边和右边看成是 2 个函数, 这 2 个函数的交点即为不动点. 所以,

$$x = \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 6}, \quad x = 4 \text{ 为不动点. 根据题目意思, 要求的是至少经过多少次递推,}$$

最后和 4 的距离之差一个很小的数, 即这里的 $\frac{1}{2^{20}}$. 对于含有不动点的递推式, 算

出不动点之后, 递推式两边减去这个不动点, 可方便转化, 所以

$$x_{n+1} - 4 = \frac{x_n^2 + 5x_n + 4}{x_n + 6} - 4 = \frac{x_n^2 + x_n - 20}{x_n + 6} = \frac{(x_n + 5)}{x_n + 6} \cdot (x_n - 4). \text{ 根据这个式子, } \{x_n - 4\} \text{ 可}$$

以看成是公比在发生细微变化(当 x_n 越靠近 4, 公比近似等于 $\frac{(x_n + 5)}{x_n + 6} \approx \frac{9}{10}$) 的等比

数列. 因为题目要求的是大概的范围, 所以可以把这个 $\{x_n - 4\}$ 数列看成是首项为

1, 公比为 $\frac{(x_n + 5)}{x_n + 6} \approx \frac{9}{10}$ 的等比数列, 因此 $x_n - 4 = (\frac{9}{10})^n$, $x_n = (\frac{9}{10})^n + 4$. 我们要求

$$x_m = (\frac{9}{10})^m + 4 \leq 4 + \frac{1}{2^{20}}, (\frac{9}{10})^m \leq \frac{1}{2^{20}}, m \log_2 \frac{9}{10} \leq -20, m \geq \frac{20}{\log_2 \frac{9}{10}}. \text{ 不等号右边的这个}$$

值可以用计算器计算得到, 但是 AMC 考试不能用计算器, 所以下面我们手动判

断它的大概取值范围.

因为 $(\frac{10}{9})^6 < 2 < (\frac{10}{9})^7$ 即, 所以 $\frac{1}{7} < \log_2 \frac{10}{9} < \frac{1}{6}$, 所以 $\frac{20}{\log_2 \frac{10}{9}} \in (120, 140)$, 选择 C

Answer: C

第 25 题

考点: 排列组合 (递推)

关键思路解析:像这样的按照某个规则去生成序列(sequence), 我们一般都可以用递推来解决. 仍然是设序列长度为 n , 满足题意的长度为 n 的序列个数为 $f(n)$, 然后找到递推关系就可以了.

解答: 我们先尝试如下写一些序列:

$$0, 1, \begin{cases} 0... \\ 1, 0... \end{cases}$$

1. 对于第 1 种情况, 数字 0 在第 3 位又重新出现了, 那么后续就和一开始是 0 一模一样了. 不过此时序列长度变小了, 变成了 $n-2$, 所以这样的序列一共有 $f(n-2)$ 个.

2. 对于第 2 种情况, 数字 0 在第 4 位重新出现, 此时序列长度为 $n-3$, 所以这样的序列一共有 $f(n-3)$ 个.

因此, 我们得到递推: $f(n) = f(n-2) + f(n-3)$.

并且, 很容易算出, $f(1)=1, f(2)=0, f(3)=1$, 因此根据递推公式可以得到下面这张表:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(x)$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	

当 $n=19$ 时, $f(19)=65$.

Answer : C