

2020 AMC10 B 解答

第1题

考点：算术

解答：原算式化简为： $1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 = \boxed{(D) 5}$ 。

第2题

考点：立体几何

解答：一个边长为1的立方体的体积为 $1^3 = 1$ ，那么5个这样的立方体总体积为 $5 \cdot 1 = 5$ 。一个边长为2的立方体的体积为 $2^3 = 8$ ，那么5个这样的立方体的总体积为 $5 \cdot 8 = 40$ ，所以这10个立方体的总体积为 $5 + 40 = \boxed{(E) 45}$ 。

第3题

考点：比例

解答：

我们有， $\frac{w}{y} = \frac{w}{x} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ ，因此 $w : y = \boxed{(E) 16 : 3}$ 。

第4题

考点：数论（质数）

解答：由题意， $a + b = 90$ 。依次从小到大尝试选项答案。若 $b = 2$ ，则 $a = 88$ 不是质数；若 $b = 3$ ，则 $a = 87$ 不是质数；若 $b = 5$ ，则 $a = 85$ 不是质数；若 $b = 7$ ，则 $a = 83$ 是质数，因此 $b = 7$ 是最小值，选D。

第5题

考点：排列组合（带有重复的排列）

解答: $\frac{7!}{1!1!2!3!} = 420$, 选 B。

第 6 题

考点: 数论 (回环数)

解答: 回环数的特点关于中间的数字, 两边对称, 所以比 15951 大的下一个回环数是将两个 5 换成 6, 且将中间的 9 换成 0, 变成 16061, 因此 2 小时内行驶了 $16061 - 15951 = 110$ 英里, 平均速度为 $110 \div 2 = 55$ 英里每小时, 选 B。

第 7 题

考点: 数论 (平方数)

解答: 由题意, 这个数一定具有这样的形式 $N = (2 \cdot 3)^2 k^2 < 2020$, 解得,

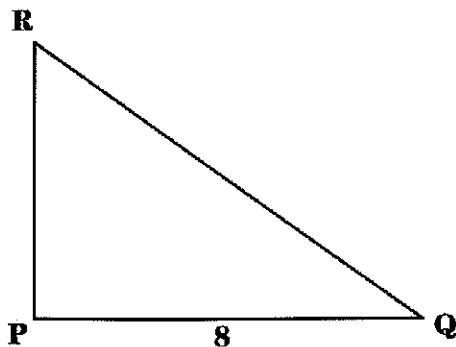
$k^2 < \frac{2020}{36} = \frac{505}{9} = 56\frac{1}{9}$, 所以 $1 \leq k \leq 7$, 每一个 k 确定一个 N , 所以共有 7 个 N , 选 A。

第 8 题

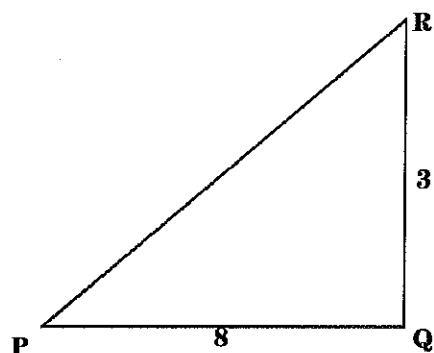
考点: 排列组合 (分类讨论)

解答: 需要对直角顶点分类讨论。

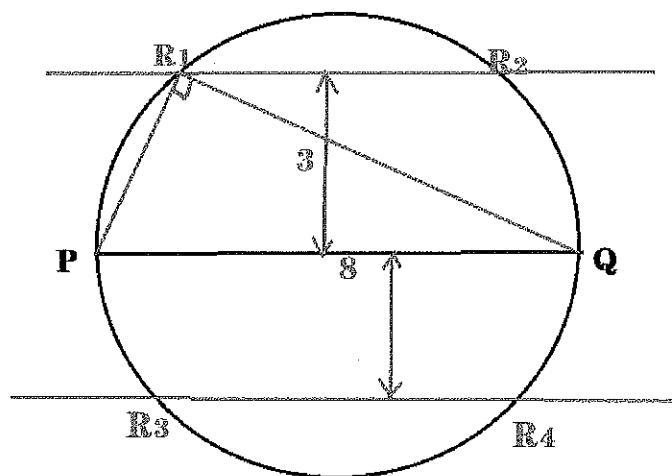
①若直角顶点为 P。如下图所示, 则 $PR=3$ 。这样的 R 点在 P 点上方和下方各一个, 所以共 2 个。



②若直角顶点为 Q。如下图所示。则 $RQ=3$, R 位于 Q 点上方或下方各一个, 共 2 个。



③若直角顶点为 R。则 R 在以 $PQ=8$ 为直径的圆上, 此圆半径为 4。而因为 R 到底边的距离为 3 (因为 $\triangle PQR$ 面积为 12), 所以 R 又在和 PQ 平行且相距为 3 的两条平行线上。因为平行线距离小于半径, 所以这 2 条平行线和圆共有 4 个交点, 因此共有 4 个 R, 如下图所示。



综上, 这样的三角形共有 8 个, 选 D。

第 9 题

考点: 数论 (不定方程)

解答: $x^{2020} + y^2 = 2y \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 1 - x^{2020} \Rightarrow 1 - x^{2020} = (y-1)^2 \geq 0$, 所以

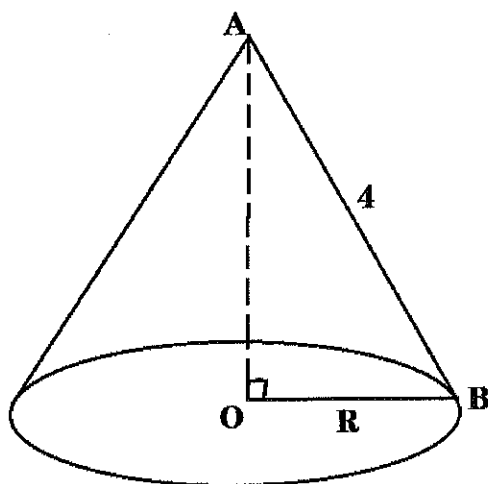
$0 \leq x^{2020} \leq 1$, 而 x 为整数, 所以 $x = 0, \pm 1$ 。

若 $x=0$ ，则 $(y-1)^2=1$ ， $y=2$ 或 0 ；若 $x=\pm 1$ ，则 $(y-1)^2=0$ ， $y=1$ 。共 4 组解，选 D。

第 10 题

考点：立体几何

解答：



假设卷成的底面圆的半径为 R ，则此圆的周长等于原扇形的弧长，即

$2\pi R = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 4$ ，解得， $R=3$ 。在直角三角形 AOB 中， $BO=3$ ， $AB=4$ ，则 $AO=\sqrt{7}$ ，

那么体积为 $V = \frac{1}{3} \pi \cdot (3)^2 \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}\pi$ ，选 C。

第 11 题

考点：概率

关键思路解析：总的可能的结果很好求，为 $C_{10}^5 \times C_{10}^5$ ；下面求 Harold 和 Betty 恰好有 2 本书相同都选的方法：第一步，先确定这 2 本书， $C_{10}^2=45$ 种；然后 Harold 从剩下的 8 本书里选择 3 本，方法数： C_8^3 种方法。Betty 再从剩下的 5 本书里选择

3本,方法数: C_5^3 . 所以符合题目要求的方法数为: $C_{10}^2 C_8^3 C_5^3$, 那么下面概率就好求了.

解答: 概率为:

$$P = \frac{C_{10}^2 C_8^3 C_5^3}{C_{10}^5 C_{10}^5} = \frac{25}{63}$$

Answer: D

第12题

考点: 幂运算

解答: 假设一共有 k 个 0, 则将 $\frac{1}{20^{20}}$ 乘以 10^{k+1} , 则第一次大于 1. 而

$$\frac{1}{20^{20}} \cdot 10^{k+1} = \frac{2^{k+1} \cdot 5^{k+1}}{2^{40} \cdot 5^{20}} = \frac{5^{k-19}}{2^{39-k}}, \text{ 我们依次将 } k=23, 24, 25, 26, 27 \text{ 代入检验, 使得结果}$$

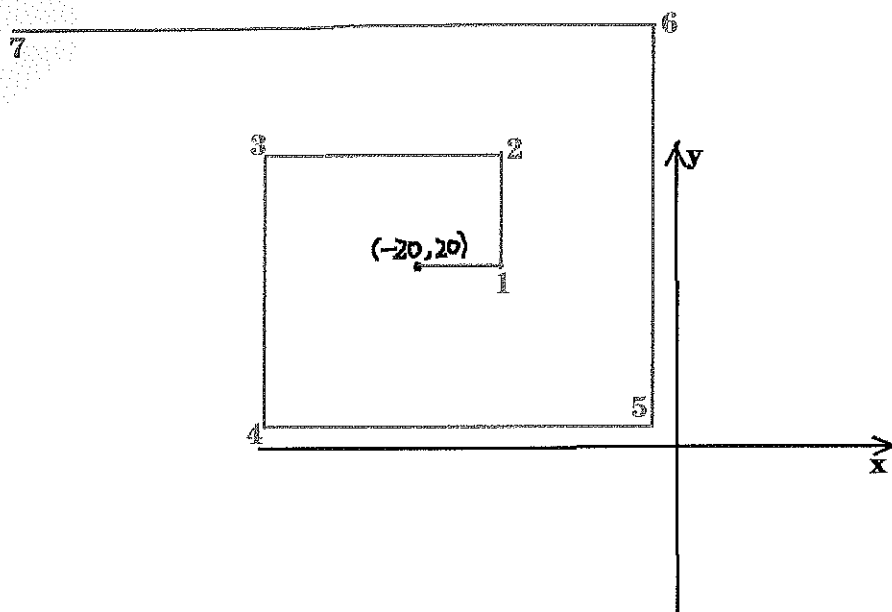
第一次大于 1 的 k 便是答案。当 $k=23$, 则 $\frac{5^{k-19}}{2^{39-k}} = \frac{5^4}{2^{16}} < \frac{625}{2^{10}} = \frac{625}{1024} < 1$; 当 $k=24$

时, $\frac{5^{k-19}}{2^{39-k}} = \frac{5^5}{2^{15}} < \frac{3125}{2^{12}} = \frac{3125}{4096} < 1$; 当 $k=25$ 时, $\frac{5^{k-19}}{2^{39-k}} = \frac{5^6}{2^{14}} = \frac{15625}{16384} < 1$, 但已经

很接近 1; 当 $k=26$ 时, $\frac{5^{k-19}}{2^{39-k}}$ 必然大于 1. 因此选 D。

第13题

考点: 数列



解答：我们先观察 x 坐标的变化：第 1 次向左转时，走了+1，第 3 次向左转时，走了-3，第 5 次向左转时，走了+5，第 7 次向左转时，走了-7，...，第 2019 次向左转时，走了-2019。所以最后 x 坐标为

$$-20+1-3+5-7+9-11+\dots+2017-2019 = -20-2-2-2-\dots-2 = -20-2\times 505 = -1030$$

再观察 y 坐标的变化：第 2 次向左转时，走了+2，第 4 次向左转时，走了-4，第 6 次向左转时，走了+6，第 8 次向左转时，走了-8，...，第 2020 次向左转时，走了-2020。因此最后 y 坐标为

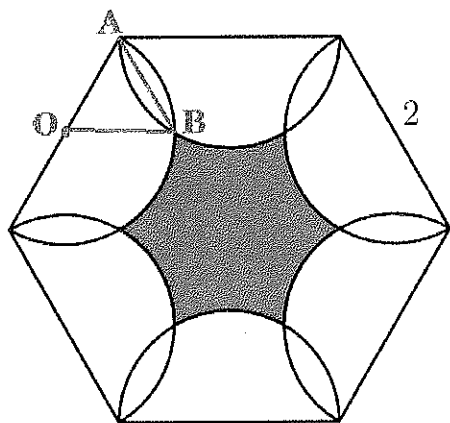
$$20+2-4+6-8+\dots+2018-2020 = 20-2-2-\dots-2 = 20-2\times 505 = -990。$$

因此最后的坐标为 $(-1030, -990)$ ，选 B。

第 14 题

考点：平面几何（面积）

解答：阴影部分的面积可以看成六边形的面积减去白色部分的面积。为了求白色部分的面积，先求两个半圆重叠部分的面积，如下图：



假设两个半圆重叠部分的面积为 S , 则 S 为扇形 OAB 的面积减去 $\triangle OAB$ 面积后,

再乘 2. 扇形 OAB 面积为 $\frac{1}{6}\pi \cdot 1^2 = \frac{1}{6}\pi$, 而等边 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 所

以 $S = 2 \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. 那么白色部分面积为

$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 \right) - 6S = 3\pi - 2\pi + 3\sqrt{3} = \pi + 3\sqrt{3}$. 而正六边形的面积为 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = 6\sqrt{3}$,

所以阴影部分面积是 $6\sqrt{3} - (\pi + 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - \pi$, 选 D.

第 15 题

考点: 数列 (周期数列)

解答: 操作完毕后, 必然留下的是一个周期数列. 因此我们只需写前面若干项,

根据题意操作, 最后检查剩余数列的周期性即可. 设最初的数列为

1234512345123451234512345123451234512345123451234512345...

第一次操作后, 变为: 1245235134124523513412452351341245235134...

第二次操作后, 变为: 124235341452513124235341452513...

第三次操作后, 变为: 124253415251_124253415251...

可以看到, 最后留下的数列是个周期数列, 周期为 12 (新的周期开始的地方留

了下划线以方便看出周期性). 因为 $2019 \equiv 3 \pmod{12}$, 所以第 2019, 2020 和第

2021 项为 4,2,5, 和为 11, 选 D。

第 16 题

考点：逻辑推理

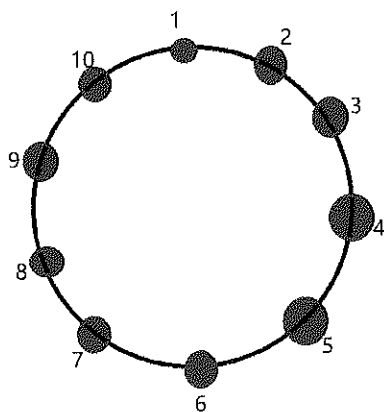
解答：为了使用最佳策略，则每个选手都应选择剩下最长线段的中点，以使得对手可选的长度尽可能小。因此我们可以看到，每次整个 $[0,n]$ 的区间被分成长度相等的若干条线段的时刻，总是在 Bela 选完后。而这样的局面会使得 Jenn 赢的概率进一步变小。因此最后总是 Bela 赢，选 A。

第 17 题

考点：排列组合（分类讨论）

方法一：对某个人进行分类讨论：

关键思路分析：这里每个人和其他人组成对，都有 3 种可能性，所以需要分类讨论。这里抓住某个人，对这个人进行分类讨论就行了。这道题的难点在于，在每个大类下，还要需要分类的小类。具体分类讨论过程如下。



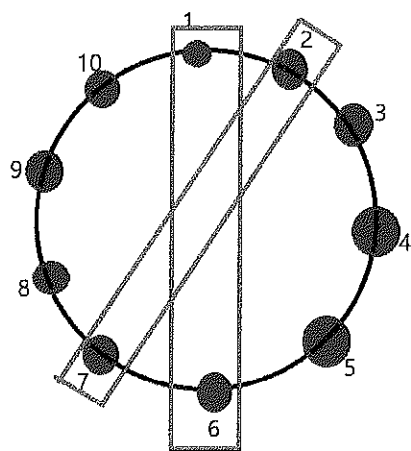
解答：如上图所示，这 10 个人已经从 1-10 编好号了。我们只需要针对 6 这个人进行分类讨论就可以了。6 这个人可以和 1 成对，也可以和 5 或者 7 成对。其中和 5

或者7成对由于是对称的,所以方法数相同.我们只需要考虑6和7成对的方法数即可,再乘2即得到6和7或者5成对总共的方法数.

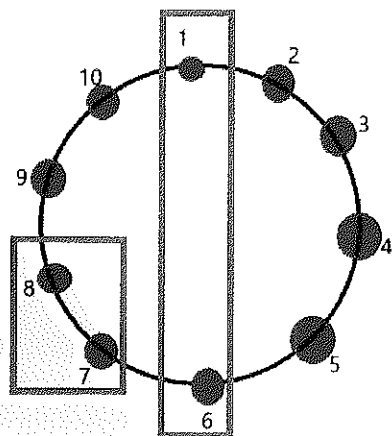
1. 如果6和1成对

此时7可以选择与2成对,或者与8成对,就需要再分2个子类进行讨论.

①7和2成对,如下图.那么9可以和10,8或者4成对,而对这3种情况的每一种,剩余的人都只有1种方法可以成对,所以总共是**3种方法**.



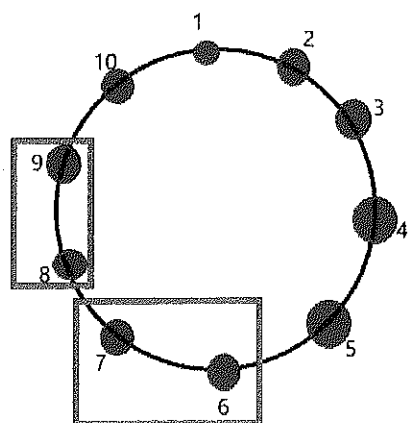
②7和8成对,如下图所示.那么9可以和4或者10成对,而对这2种情况的每一种,剩余的人都只有1种方法可以成对,所以总共是**2种方法**.



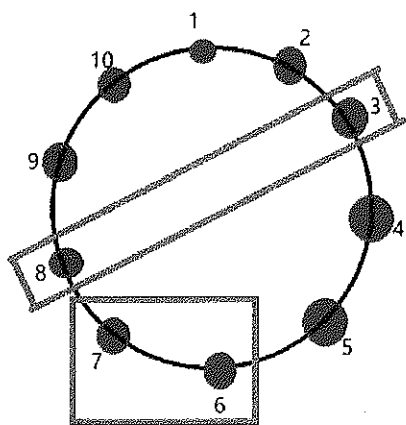
综上,1和6成对这种情况,一共有 $3+2=5$ 种方法.

2. 如果6和7成对, 此时8可以选择和9或者和3成对, 下面分这2个子类进行讨论.

①若8和9成对, 如下图所示; 此时10和1或者5成对, 不论哪种情况, 剩余的人都只有1种方法可以成对, 所以一共是2种方法.



②若8和3成对, 如下图所示; 此时9和10或者4成对, 不论哪种情况, 剩余的人都只有1种方法可以成对, 所以一共是2种方法.

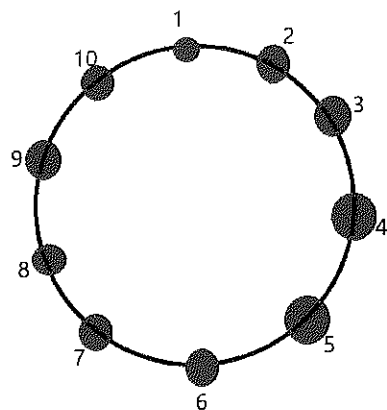


综上, 当6和7成对时, 共 $2+2=4$ 种方法.

因为6和5成对与6和7对称, 情况一样, 所以也是4种方法.

所以总共 $5+4\times 2=13$ 种方法. 选C.

方法二：对这 5 组中，对面的两个人在同一组的组数分类讨论。



对 10 个人编号如上图。

- ① 若全部 5 组每组中的两个人都位于圆的对面，则只有 1 种：1 和 6，2 和 7，3 和 8，4 和 9，5 和 10。
- ② 若有 4 组，每组中的两人位于对面。则剩下的 2 个人也位于对面，这样就和第①种重复，不考虑。共 0 种方法。
- ③ 若有 3 组，每组中的两个位于对面。这 3 组只能是(1,6),(2,7),(3,8)或(2,7),(3,8),(4,9)或(3,8),(4,9),(5,10)或(4,9),(5,10),(1,6)或(5,10),(1,6),(2,7)这 5 种可能性（即在圆上是连续的 3 对），其他情况最后只能和第①种重复。确定完这 3 组后，剩下的 4 个人只有 1 种方法。例如若选(1,6),(2,7),(3,8)这 3 组，则剩下 4,5,9,10 这 4 人，因为只能相邻的在一组，所以只有一种方法：(4,5),(9,10)。因此共 5 种方法。
- ④ 若有 2 组，每组中的两个位于对面，则剩下的人进行分组，因为只能和圆上相邻的人分一组，则无法实现。例如，若(1,6)，(3,8)为一组，则剩下的人为 2,4,5,7,9,10。其中，和 2 相邻的 1 和 3 已经分组，因此无法实现。所以 0 种方法。

⑤若只有1组,这组中的两个位于对面。这一组共5种情况。确定这组后,剩下的8个人只能和圆上相邻的人分一组,只有1种方法。例如,若(1,6)为一组,则剩下2,3,4,5,7,8,9,10,他们只能是(2,3),(4,5),(7,8),(9,10)。因此共5种方法。

⑥若有0组,每组中的两个人位于对面。即每组中的两个人都是圆上相邻的,有2种情况:(1,2),(3,4),(5,6),(7,8),(9,10)或(1,10),(2,3),(4,5),(6,7),(8,9)。

综上,一共 $1+5+5+2=13$ 种方法。选C。

第18题

考点: 概率(分类讨论)

关键思路解析: 原来是红蓝各1个,经过4次操作,有6个球,红蓝各3个,意味着4次操作中,抽到了2个红色,2个蓝色。那么根据4次操作中哪2次摸到红球,需要进行分类讨论。

解答:

①若第1和第2次摸到红球,其他摸到蓝球,概率为 $P = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{30}$

②若第1和第3次摸到红球,其他摸到蓝球,概率为 $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{30}$

类似的,还可以算出其他4种情况的概率也均为 $\frac{1}{30}$ 。那么总的概率为 $\frac{1}{5}$ 。

Answer: B

第19题

考点: 排列组合+数论(整除规则)

解答: $C_{52}^{10} = \frac{52!}{42! \cdot 10!} = 17 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 26 \cdot 10 = 158A00A4AA0$ 。因此

$17 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 26 = 158A00A4AA$ 。表明158A00A4AA能被2整除但不能被4

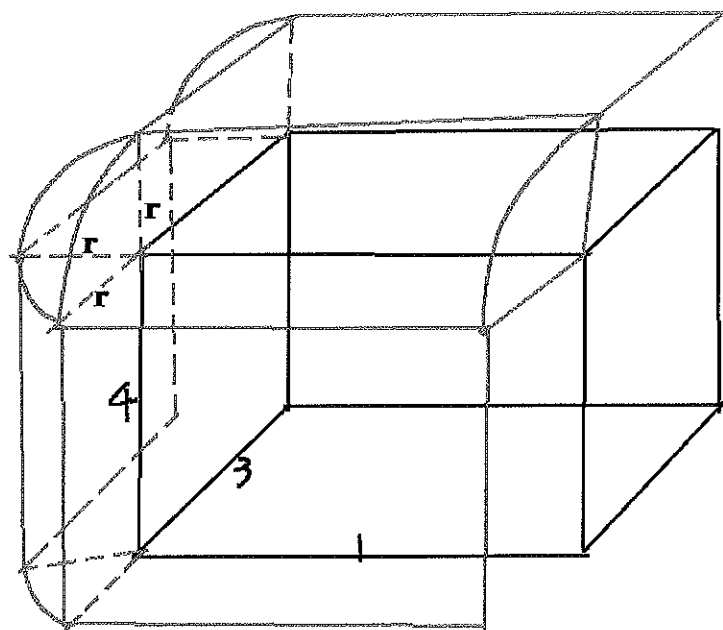
整除。因此A为偶数,排除B和E。若A=4,则158A00A4AA以44结尾,能被

4 整除, 不符合要求, 排除 C。又因为 $17 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 26 = 1584004444$ 不能被 3 整除, 所以 $1+5+8+A+0+0+A+4+A+A=18+4A$ 不能被 3 整除, 而当 $A=6$ 时, $18+4A=42$ 能被 3 整除, 不符合要求, 排除 D。只能选择 A。

第 20 题

考点: 立体几何

解答: $S(r)$ 在长方体的某个角落附近的立体图形如下所示:



由图可见, $S(r)$ 包括了原长方体, 而在原来的长方体之外, 沿着每条棱都存在底面半径为 r , 高度为棱长的 $\frac{1}{4}$ 圆柱; 平行于每个面, 都存在以这个面为底面, 高为 r 的长方体; 最后在每个顶角处, 都有一个以 r 为半径的 $\frac{1}{8}$ 球。下面分别计算它们的体积:

①原来长方体的体积: $1 \times 3 \times 4 = 12$;

②所有圆柱体的体积和: 每四条平行的棱处的 $\frac{1}{4}$ 圆柱体可合并成一个完整的圆柱体, 此圆柱体的底面是半径为 r 的圆, 高为棱长。因此所有圆柱体的体积为

$$\pi r^2 \cdot 1 + \pi r^2 \cdot 3 + \pi r^2 \cdot 4 = 8\pi r^2;$$

③所有平行于面的外部长方体体积之和为: $2 \cdot (1 \cdot 3 \cdot r) + 2 \cdot (1 \cdot 4 \cdot r) + 2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot r) = 38r$;

④所有顶点处的 $\frac{1}{8}$ 球体积之和: 8 个顶点处的 $\frac{1}{8}$ 球恰好拼成一个半径为 r 的球,

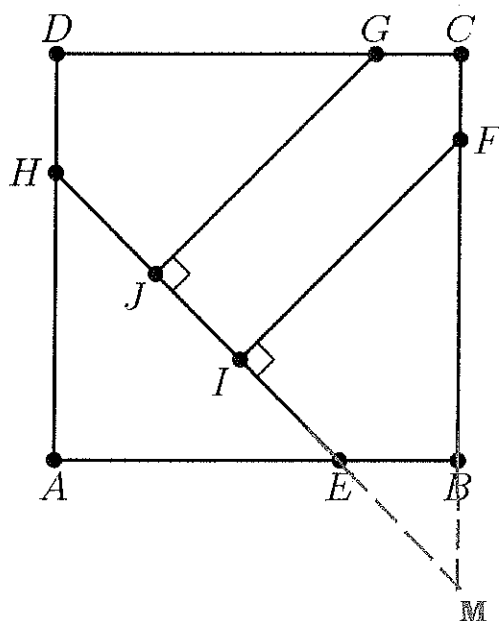
因此球的总体积为: $\frac{4\pi r^3}{3}$ 。

综上, $S(r) = \frac{4\pi r^3}{3} + 8\pi r^2 + 38r + 12$, 则 $\frac{bc}{ad} = \frac{8\pi \cdot 38}{\frac{4\pi}{3} \cdot 12} = 19$, 选 B。

第 21 题

考点: 平面几何 (面积)

解答:



延长 HE, CB 交于 M 点。因为三角形 AEH, 四边形 BFIE, 四边形 DHJG 和五边形 FCGJI 面积均为 1, 因此正方形 ABCD 的面积为 4, 那么边长为 2, 而等腰直角 $\triangle AEH$ 的面积为 1, 则 $AE = AH = \sqrt{2}$, 则 $BE = 2 - \sqrt{2}$, 所以

$S_{\triangle BEM} = \frac{1}{2} BE^2 = \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle FIM} = 1 + 3 - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}$, 因为

$\triangle FIM$ 是个等腰直角三角形, 因此 $\frac{1}{2} \cdot FI^2 = 4 - 2\sqrt{2}$, $FI^2 = 8 - 4\sqrt{2}$, 选 B。

第 22 题

考点: 多项式 (长除)

关键思路解析: 这道题, 我们直接用长除算即可。

解答:

$$\begin{array}{r}
 2^{101} + 2^{51} + 1 \overline{) 2^{202} + 202} \\
 \underline{2^{202} + 2^{152} + 2^{101}} \\
 -2^{152} - 2^{101} + 202 \\
 \underline{-2^{152} - 2^{102} - 2^{51}} \\
 2^{101} + 2^{51} + 202 \\
 \underline{2^{101} + 2^{51} + 1} \\
 201
 \end{array}$$

Answer: D

第 23 题

考点: 排列组合

解答: 我们观察选项答案, 都是很大的数字, 猜想前面 19 次变换每次变换可以从 4 个变换中任选一个, 第 20 次通过一次变换能将所有顶点都映射回原来的位置。下面验证这一点。

经过 19 次变换后 (注意 19 是个奇数), 顶点 A 一定位于第二或第四象限, 且每对称一次就会改变从 A 到 D 的旋转方向, 因此考虑到 A 点所处的象限有 2 种可能性, 以及从 A 到 D 的旋转方向也有 2 种可能性, 共 4 种可能性。我们列出 19 次变换后正方形顶点位置的所有 4 种可能性, 检验每种可能性是否都可能通过第 20 次这一次变换映射回原来的位置。19 次变换后正方形的顶点位置的所有

可能性如下:

前19次变换后 的顶点位置	$C \ B$	$A \ D$	$C \ D$	$A \ B$
	$D \ A$	$B \ C$	$B \ A$	$D \ C$
第20次变换	L	R	H	V

可见每种可能性都可以通过第20次变换映射回原来的位置。因此总共有 $4^{19} = 2^{38}$ 个这样的序列, 选C。

第24题

考点: 代数(地板函数)

关键思路解析: 这里若是用图像法来解决, 左边是一条直线, 右边是地板函数。从图上很难看出来有多少个交点, 因为地板函数是分段的。所以这里我们只能采取代数方法解决。对于含有地板函数, 用代数方法解决时, 我们可以把地板函数包起来的那个数设为一个整数 k , 然后确定 k 的范围, 由此得到 n 的范围。

解答: 设 $[\sqrt{n}] = k$, 所以 $k \leq \sqrt{n} < k+1$, 因此, $k^2 \leq n < (k+1)^2$, 而有题目已知条件, $n = 70k - 1000$, 所以, $k^2 \leq 70k - 1000 < (k+1)^2$, 解得, $34 + \sqrt{155} < k \leq 50$ 或者 $20 \leq k < 34 - \sqrt{155}$, 因为 k 是整数, 所以, $47 \leq k \leq 50$ 或者 $20 \leq k \leq 21$, 因此, $k = 47, 48, 49, 50, 20, 21$, 可取6个值, 而每个 k 都可由 $n = 70k - 1000$ 对应算出唯一的 n , 因此也有6个 n , 选C。

第25题

考点: 排列组合(球和罐子模型)

关键思路解析: 要把 96 写成几个因子相乘, 先对 96 进行质因数分解, 看质因数如何分配. $96 = 2^5 \times 3$. 根据 96 写成几个因子相乘, 需要对因子的个数(即这里 k 的值)进行分类讨论. 在具体的讨论中, 我们会用到球和罐子模型.

解答:

可以把 2 看成红球, 3 看成蓝球. 则这里有 5 个红球和 1 个蓝球需要放入罐子里. 这里需要考虑因子的顺序, 即, 罐子都是不同的.

1. 若 $k=1$, $96=96$, 1 种;

2. 若 $k=2$, 则把 5 个红球和 1 个蓝球放入 2 个罐子里. 先放蓝球, 有 2 种方法; 因为因子大于 1, 所以另外一个罐子再放入一个红球, 剩下的 4 个红球放入 2 个罐子, 罐子可以为空, 有 $C_{4+2-1}^{2-1} = C_5^1 = 5$ 种方法. 所以当 $k=2$, 共 $2 \times 5 = 10$ 种方法.

3. 若 $k=3$, 则把 5 个红球和 1 个蓝球放入 3 个罐子里. 先放蓝球, 有 3 种方法; 因为因子大于 1, 所以另外 2 个罐子再各放入一个红球, 剩下的 3 个红球放入 3 个罐子, 罐子可空, 有 $C_{3+3-1}^{3-1} = C_5^2 = 10$ 种方法. 所以当 $k=3$, 共 $3 \times 10 = 30$ 种方法.

4. 若 $k=4$, 则把 5 个红球和 1 个蓝球放入 4 个罐子里. 先放蓝球, 有 4 种方法; 因为因子大于 1, 所以另外 3 个罐子再各放入一个红球, 剩下的 2 个红球放入 4 个罐子, 罐子可空, 有 $C_{2+4-1}^{4-1} = C_5^3 = 10$ 种方法. 所以当 $k=4$, 共 $4 \times 10 = 40$ 种方法.

5. 若 $k=5$, 则把 5 个红球和 1 个蓝球放入 5 个罐子里. 先放蓝球, 有 5 种方法; 因为因子大于 1, 所以另外 4 个罐子再各放入一个红球, 剩下的 1 个红球放入 5 个罐子, 罐子可空, 有 5 种方法. 所以当 $k=5$, 共 $5 \times 5 = 25$ 种方法.

6. 若 $k=6$, 则把 5 个红球和 1 个蓝球放入 6 个罐子里. 先放蓝球, 有 6 种方法;
因为因子大于 1, 所以另外 5 个罐子再各放入一个红球, 只有 1 种方法. 所以当
 $k=6$, 共 6 种方法

综上, 总共 $1+10+30+40+25+6=112$ 种方法.

Answer : A