

2021 AMC10A 秋季试题解答

第1题

考点: 简单算术

解答: $\frac{(2112-2021)^2}{169} = \frac{91^2}{13^2} = 7^2 = 49$. 选择 C

第2题

考点: 简单几何

解答: 根据这句话“如果她把卡片一边的长度缩短1英寸, 卡片的面积将变为18平方英寸”, 可知, 缩短的这条边是长度为4的边. 现在长度为4的这条边不变, 而是把长度为6的边变为5, 则面积为 $4 \times 5 = 20$ 平方英寸. 选择 E.

第3题

考点: 简单立体几何

解答: 将立方体的体积除以一个泥球的体积, 即可得最多可放的泥球个数:

$$\frac{6^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3} = 6.44 \approx 6, \text{最多可以放6个, 选D.}$$

第4题

考点: 简单代数应用题

解答: 路线 A 所花的时间为: $\left(\frac{6}{30}\right) \times 60 = 12$ 分钟. 路线 B 所花的时间为:

$$\left(\frac{1}{20} + \frac{9}{40}\right) \times 60 = 1.5 + 6.75 = 8.25 \text{ 分钟. 所以路线 B 比路线 A 快 } 3.75 \text{ 分钟, 选择 B.}$$

第5题

考点: 数论: 整除规则

关键思路解析: 若 A 为 1, 因为 $2+0+2+1+0+1=6$ 能被 3 整除, 因此 202101 能被 3 整除, 非质数; 若 A 为 3, 因为 202103 的奇数位之和与偶数位之和相等, 即 $3+1+0=0+2+2$, 因此 202103 能被 11 整除; 若 A 为 5, 则 202105 能被 5 整除; 若 A 为 7, 因为 202107 各个位上数字之和 $2+0+2+1+0+7=12$ 能被 3 整除, 因此 202107 是 3 的倍数。所以答案只能选 E。

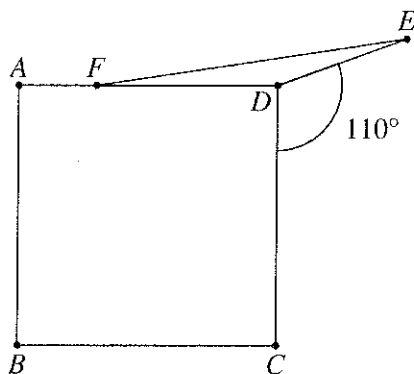
答案: E

第6题

考点: 简单算术

解答: 先算出相邻两根电线杆的距离, 为 $\frac{5280}{40}=132$ 英尺, 所以鸵鸟跳一次的步长为 $\frac{132}{12}=11$ 英尺, 而鸛一步的步长为 $\frac{132}{44}=3$ 英尺, 两者相差 8 英尺, 选 B

第7题



考点: 平面几何

解答: $\angle ADE = 360^\circ - 110^\circ - 90^\circ = 160^\circ$, 而 $DE = DF$, 所以 $\angle E = 10^\circ$, 那么 $\angle AFE = 160^\circ + 10^\circ = 170^\circ$, 选择 D.

第 8 题

考点: 不定方程, 分类讨论.

解答: 假设这个两位数是 AB , 则 $10A + B = B^2 + A$, 即 $B(B-1) = 9A$. 下面对 B 的情况进行分类讨论:

1. 若 $B=0$, 则 $A=0$, 不符题意。
1. 若 $B=1$, 则 $A=0$, 不符题意。
2. 若 $B=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 时, 则 A 不是整数。
3. 若 $B=9$, 则 $A=8$, 这个两位数是 89.

因此只有 1 个两位数是可爱的, 它是 89. 选择 B

第 9 题

考点: 概率+分类讨论

解答: 假设出现奇数的概率为 x , 则出现偶数的概率是 $3x$, 因此 $x + 3x = 1, x = \frac{1}{4}$. 因此掷一次, 结果奇数的概率为 $\frac{1}{4}$, 结果为偶数的概率为 $\frac{3}{4}$. 两个数和为偶数, 则分为 2 种情况:

1. 这 2 个数都是奇数。概率为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.
2. 这 2 个数都是偶数, 概率为 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

那么总的概率为: $P = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. 选择 E.

第 10 题

考点: 简单统计

解答: 这里所求的均值即为期望值, 而期望值的公式如下:

$$\text{期望值} = \sum (\text{结果} \times \text{概率})$$

$$\text{因此, } t = 50 \cdot \frac{1}{5} + 20 \cdot \frac{1}{5} + 20 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} = 10 + 4 + 4 + 1 + 1 = 20.$$

$$s = 50 \cdot \frac{50}{100} + 20 \cdot \frac{20}{100} + 20 \cdot \frac{20}{100} + 5 \cdot \frac{5}{100} + 5 \cdot \frac{5}{100} = 25 + 4 + 4 + 0.25 + 0.25 = 33.5$$

所以 $t - s = -13.5$, 选 B.

第 11 题

考点: 代数: 列方程解应用题

解答: 设 Emily 的速度是每秒钟走 x 步, 船速是每秒钟 y 步, 船身长是 z 步, 则

根据题意, 当 Emily 的方向和船的方向一致时, Emily 相对于船的速度是 $(x-y)$ 步

每秒, 从船尾走到船头, 所花时间为: $\frac{z}{x-y}$ 秒, 此时间内走了 210 步, 因此得到

$$\text{方程: } x \cdot \frac{z}{x-y} = 210, \text{ 即 } \frac{z}{1-\frac{y}{x}} = 210$$

类似的, 若 Emily 的方向和船的方向相反, 因为 Emily 从船头走到船尾只需 42

步, 因此

$$x \cdot \frac{z}{x+y} = 42, \text{ 即 } \frac{z}{1+\frac{y}{x}} = 42.$$

令 $\frac{y}{x} = m$, 所以上述 2 个方程变为如下方程组:

$$\begin{cases} \frac{z}{1-m} = 210 \\ \frac{z}{1+m} = 42 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} z = 70 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ 因此船身长 70 步, 选 A.}$$

第 12 题

考点: 数论: 进制和模运算

关键思路解析: 先将这 9 进制数化成 10 进制, 然后用模运算的性质求余.

解答:

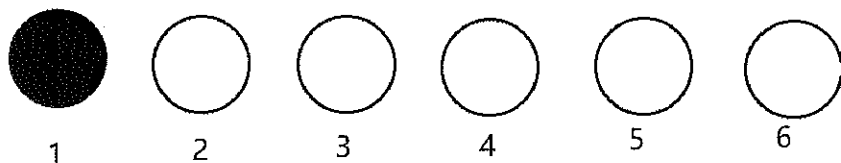
$$\begin{aligned} 27006000052_9 &= 2 \cdot 9^{10} + 7 \cdot 9^9 + 6 \cdot 9^6 + 5 \cdot 9 + 2 \\ &\equiv 2 \cdot (-1)^{10} + 7 \cdot (-1)^9 + 6 \cdot (-1)^6 + 5 \cdot (-1) + 2 = 2 - 7 + 6 - 5 + 2 = -2 \equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

答案: D

第 13 题

考点: 概率

解答:



观察第 1 个球, 若颜色为黑, 则编号为 2~6 的球需要至少 3 个球颜色均为白色。

若恰好 3 个球为白色, 如, 2~4, 则 5 和 6 是黑色。此时满足题意。若 2~6 中有

4 个球为白色, 如 2~5, 则 6 为黑色。则我们观察球 2, 其余 5 个球中和它颜色

不同的球只有 1 和 6, 没有超过一半, 不符题意。若 2~6 中全部为白色。则我们

观察球 2, 其余 5 个球中和它颜色不同的球只有 1, 没有超过一半, 不符题意。

因此符合题意的情况是 3 个白球, 3 个黑球, 一共有 $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$, 而总共

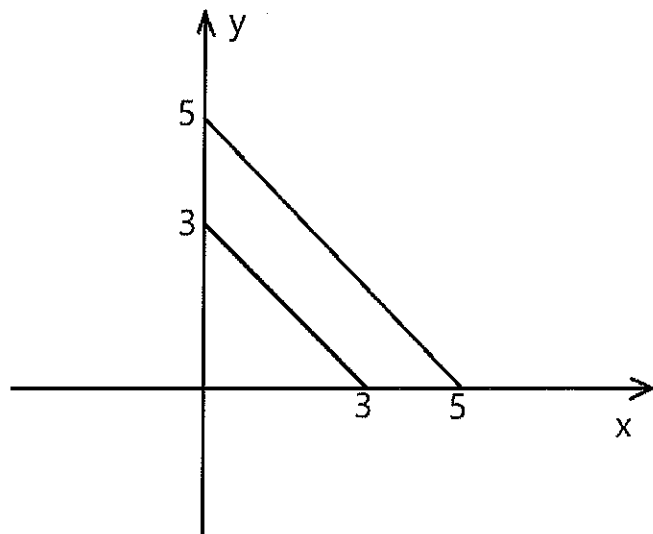
的情况数是: $2^6 = 64$, 概率为 $P = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$ 。选 D.

第 14 题

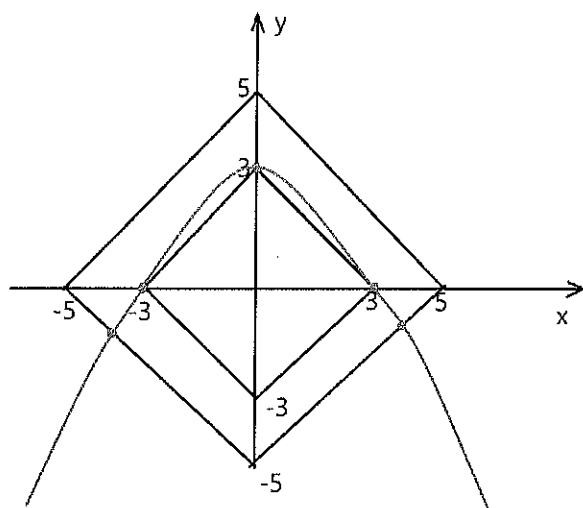
考点：数形结合

解答：分别画出 2 个方程所表示的图像，看有多少个交点即可。

第一个方程 $3y = -x^2 + 9$ 是个抛物线，比较好画。第二个方程 $(|x| + |y| - 4)^2 = 1$ ，可以利用对称性来画。若将方程中的 x 全部换成 $-x$ ，原方程不受影响，说明点 (x, y) 和点 $(-x, y)$ 都在图像上，那么图像关于 y 轴对称。同理，将方程中的 y 全部换成 $-y$ ，原方程不受影响，说明点 (x, y) 和点 $(x, -y)$ 都在图像上，那么图像关于 x 轴对称。因此我们只需要先画出第一象限的图像，其余象限图像可通过对称得到。图像位于第一象限时， $x > 0, y > 0$ ，因此方程化为： $(x + y - 4)^2 = 1$ ，即 $x + y - 4 = 1$ 或者 $x + y - 4 = -1$ ，这是 2 条直线各自在第一象限的部分，如下图：



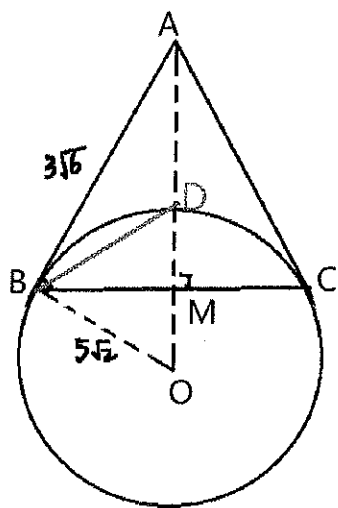
然后将这个图像分别关于 x 轴和 y 轴对称，得到下图。再将抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ 的图像叠加到同一张图上，如下图：



从图中可以看到，两个图像的交点一共与 5 个，因此解为 5 个，选择 D.

第 15 题

考点：平面几何：相似三角形和勾股定理



解答:我们要求的是 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积，只要先求出半径 R 即可. 连接 BO 和 AO ，交 BC 于 M . 假设 $\triangle ABC$ 的外心(circumcenter)为 D ，则 D 在 AO 上， $DB=DA=R$. 在直角 $\triangle BDM$ 中， $BM^2 + DM^2 = BD^2$ ，即 $BM^2 + (AM - R)^2 = R^2$ ，

化简得到, $R = \frac{BM^2 + AM^2}{2 \cdot AM} = \frac{AB^2}{2 \cdot AM} = \frac{54}{2 \cdot AM} = \frac{27}{AM}$. 因此接下来求 AM . 在直角

三角形 ABO 中, 因为 $AB = 3\sqrt{6}$, $BO = 5\sqrt{2}$, 所以 $AO = 2\sqrt{26}$. 由

$\triangle ABM \sim \triangle AOB$, 有 $AB^2 = AO \cdot AM$, 即 $54 = 2\sqrt{26} \cdot AM$, 得 $AM = \frac{27}{\sqrt{26}}$. 所以,

$$R = \frac{27}{AM} = \sqrt{26}.$$

那么圆的面积为 $\pi R^2 = 26\pi$. 选择 C

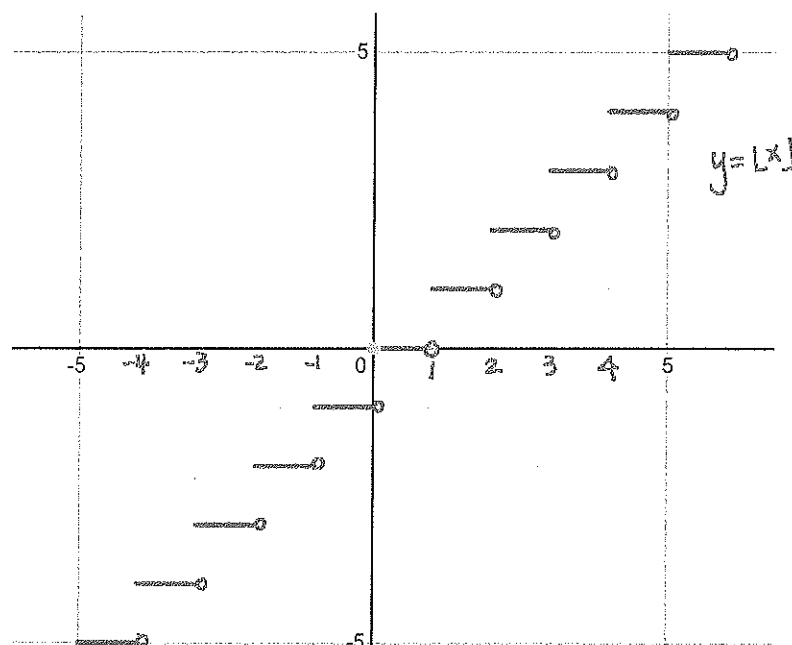
第 16 题

考点: 地板函数(floor function)图像, 函数图像的变换.

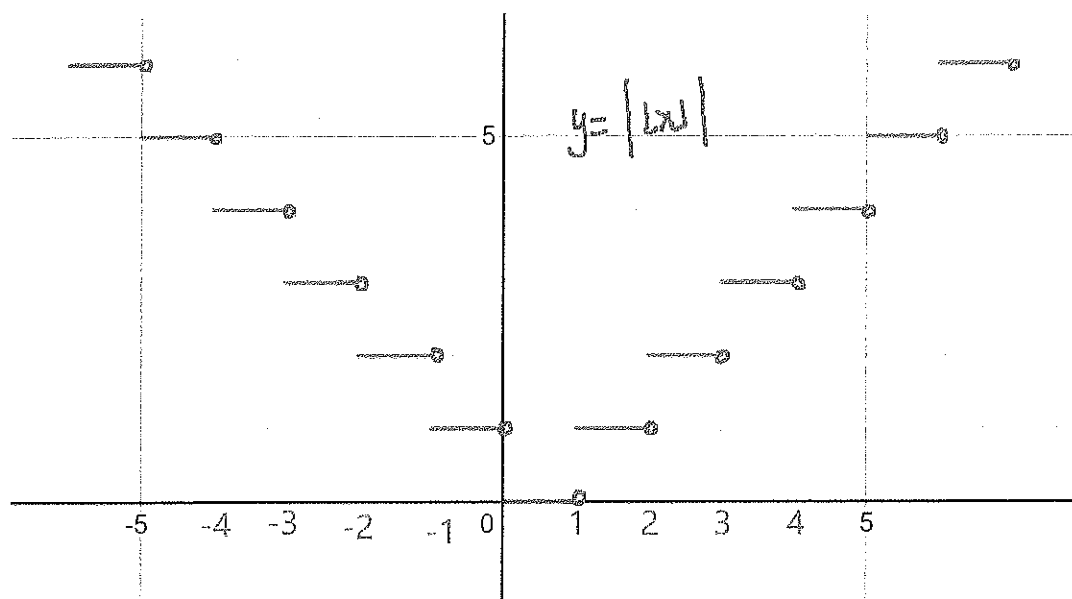
解答: 这个函数的图像可以看成两个函数 $g(x) = \lfloor x \rfloor$ 和 $h(x) = 1 - \lfloor x \rfloor$ 相减而成.

前者的函数图像比较容易得到, 后者可以由前者图像通过变换得到.

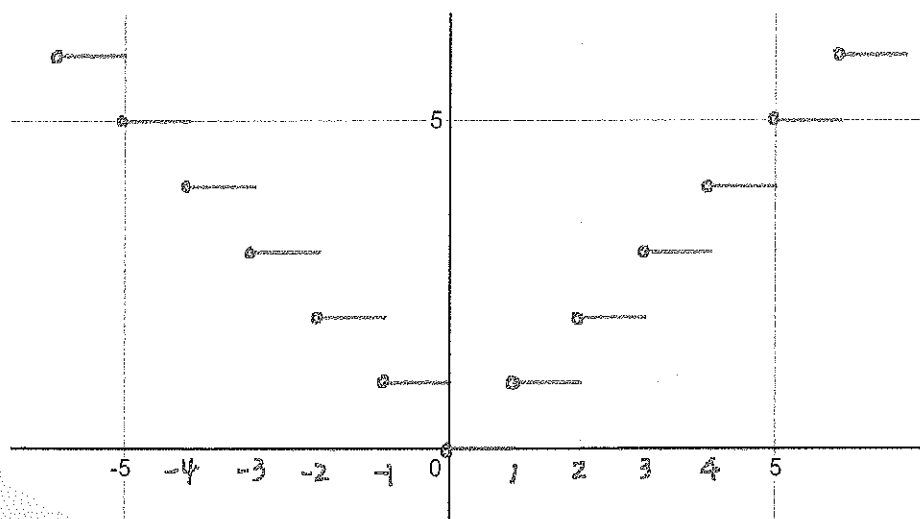
我们知道, $y = \lfloor x \rfloor$ 的图像如下:



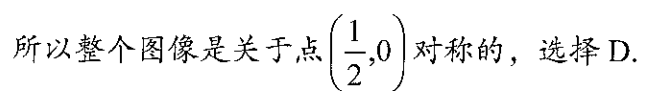
那么 $g(x) = \lfloor x \rfloor$ 的图像由 $y = \lfloor x \rfloor$ 将其 y 轴下方的图像关于 y 轴对称得到, 其他部分不变. 如下



因为 $h(x) = \lfloor 1-x \rfloor = \lfloor -(x-1) \rfloor$ 可以看成是 $g(x) = \lfloor x \rfloor$ 的图像 (即上述图像) 先关于 y 轴对称, 再向右平移 1 个单位得到, 因此得到 $h(x)$ 的图像如下:



将第 2 张图像和第 3 张图像相减, 即得所需要的 $f(x)$ 的图像, 如下:



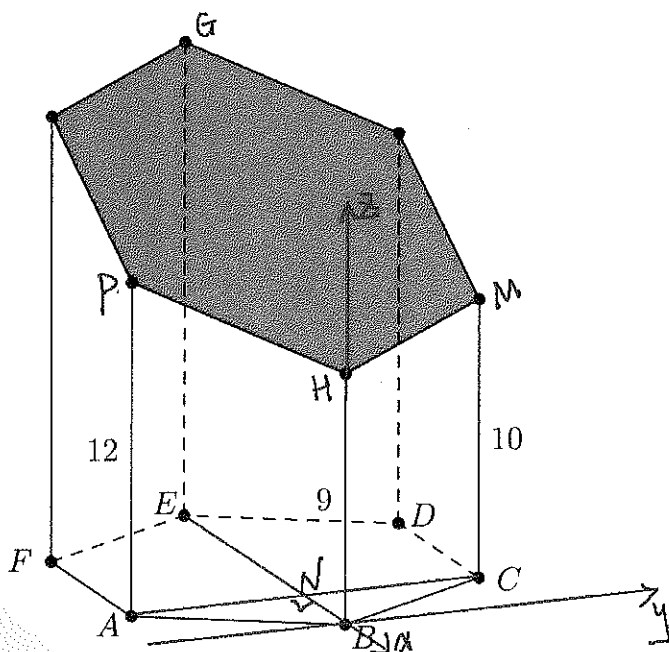
考点：立体几何



564

下面通过证明 $\triangle PHK \cong \triangle NQM$ 求出 OP 的高度. 因为平面 NABM//平面 POCK, 所以它们和太阳能面板的交线 $PK \parallel NM$ 。又 $QM \parallel HK$, 则 $\angle PKH = \angle NMQ$ 。因为 $\angle PHK = \angle NQM$, 所以 $\triangle PHK \cong \triangle NQM$, 因此 $PH = NQ = 3$. 所以 $PO = PH + HO = 3 + 10 = 13$. 而 $PO = \frac{MB + GE}{2} = \frac{9 + GE}{2}$, 即 $13 = \frac{9 + GE}{2}$, 所以 $GE = 17$.

方法 2: 建立空间直角坐标系



565

$H(0,0,9)$, $M(-1,\sqrt{3},10)$, 假设过 P、H、M 的三点的平面方程

为: $Ax + By + Cz + D = 0$, 代入得,

$$\begin{cases} -A - \sqrt{3}B + 12C + D = 0 \\ 9C + D = 0 \\ -A + \sqrt{3}B + 10C + D = 0 \end{cases}, \text{解得}, \begin{cases} A = 2C \\ B = \frac{C}{\sqrt{3}} \\ D = -9C \end{cases}, \text{因此太阳能面板所在的平面方程为:}$$

$2Cx + \frac{C}{\sqrt{3}}y + Cz - 9C = 0$, 即 $2x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + z - 9 = 0$. 因 GE 的长度为点 G 的 z 坐标,

因此我们求出点 G 的坐标即可. 将 $G(-4,0,z)$ 代入平面方程, 得到,

$-8 + z - 9 = 0, z = 17$, 因此 $GE = 17$, 选择 D.

第 18 题

考点: 排列组合: 分类讨论

解答:

对 4 个区域编号如下:

1	2
4	3

对角线上的 2 个区域农作物相同还是不同, 会对另外 2 个区域的可能性产生影响。

所以我们分 2 种情况讨论.

- ① 若区域 1 和 3 的农作物相同, 有 4 种方法. 例如, 都是玉米. 那么此时区域 2 和区域 4 分别都有 3 种可能, 可能种植玉米, 黄豆或土豆. 因此这种情况下共有 $4 \times 3 \times 3 = 36$ 种方法.

② 若区域 1 和 3 的农作物不同, 有 $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ 种方法。例如, 区域 1 和区域 3 分别种植玉米和小麦(其他情况都相同), 那么区域 2 能种植黄豆或土豆, 区域 4 也能种植黄豆或土豆, 都各有 2 种方法。因此, 总的方法数是 $12 \times 2 \times 2 = 48$ 。

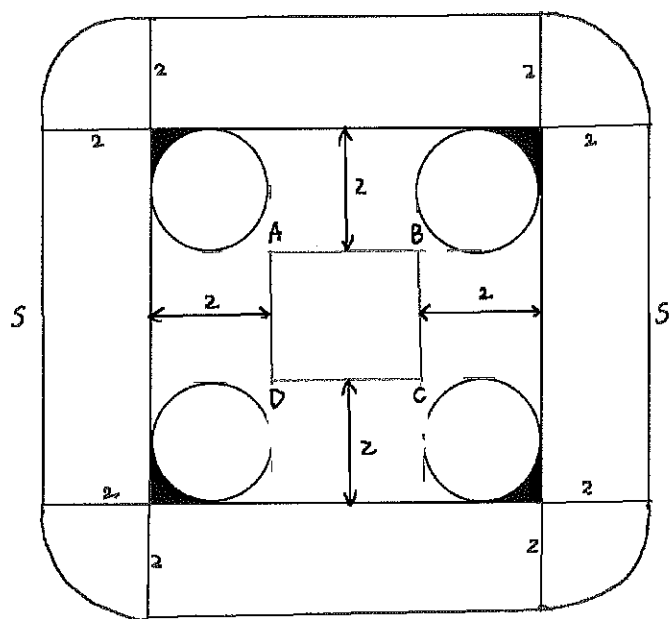
(区域 1 和 3 只要种植的农作物不同, 那么区域 2 和 4 均分别有 2 种方法)

综上, 总共有 $36 + 48 = 84$ 种方法, 选择 C。

第 19 题

考点: 平面几何+动态思维

解答:



外面的圆扫过的区域如上图由 4 个长宽分别为 s 和 2 的长方形和 4 个半径为 2 的 $1/4$ 圆组成, 因此 $2A = 4 \cdot 2s + \pi \cdot 2^2 = 8s + 4\pi$. 而内部圆没有扫过的区域为正方形

ABCD, 以及大的正方形的 4 个角落 (图中阴影部分), 因此它扫过的面积为

$A = s^2 - [(s-4)^2 + 4 \cdot (1 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2)] = 8s - 20 + \pi$, 所以 $8s + 4\pi = 2(8s - 20 + \pi)$, 解得,

$s = 5 + \frac{\pi}{4}$, $a+b+c=10$. 选择 A.

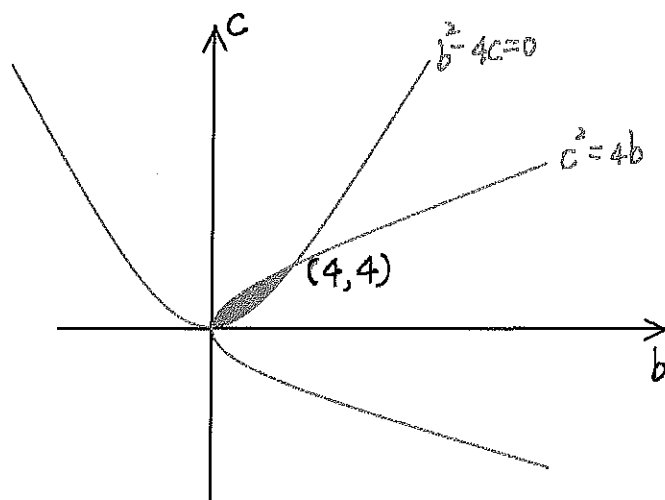
第 20 题

考点：二次方程判别式，解不等式组，数形结合，分类讨论。

解答：因为方程 $x^2 + bx + c = 0$ 和 $x^2 + cx + b = 0$ 同时没有两个不相等的实数根，所以有

$$\begin{cases} b^2 - 4c \leq 0 \\ c^2 - 4b \leq 0 \end{cases}$$

画出上述不等式组，如下：



可以看到，正整数 b 只能取 1, 2, 3, 4. 下面依次分类讨论：

1. 若 $b=1$, 则 $\begin{cases} 1 \leq 4c \\ c^2 \leq 4 \end{cases}$, 得, $\frac{1}{4} \leq c \leq 2$, $c=1, 2$, 有 2 对.
2. 若 $b=2$, 则 $\begin{cases} 4 \leq 4c \\ c^2 \leq 8 \end{cases}$, 得, $1 \leq c \leq 2\sqrt{2}$, $c=1, 2$, 有 2 对.
3. 若 $b=3$, 则 $\begin{cases} 9 \leq 4c \\ c^2 \leq 12 \end{cases}$, 得, $2\frac{1}{4} \leq c \leq 2\sqrt{3}$, $c=3$, 有 1 对.
4. 若 $b=4$, 则 $\begin{cases} 16 \leq 4c \\ c^2 \leq 16 \end{cases}$, 得, $4 \leq c \leq 4$, $c=4$, 有 1 对.

所以共有 6 对. 选择 B。

第 21 题

考点: 排列组合: 分组公式

解答:

①先将 20 个球分成 3,5,4,4,4 的 5 组, 分组方法为: $\frac{20!}{3!5!4!4!4!}$, 再将这 5 组分配给 5 个箱子, 有 5! 种方法。因此总的方法数为: $\frac{20!}{3!5!4!4!4!} \cdot 5! = \frac{20!}{3!4!4!4!}$ 。

②将 20 个球分成 4,4,4,4,4 的 5 组, 分组方法为: $\frac{20!}{4!4!4!4!4!}$, 因为再将这 5 组分配给 5 个箱子, 有 5! 种方法。因此总的方法数为: $\frac{20!}{4!4!4!4!4!} \cdot 5! = \frac{20!}{4!4!4!4!}$ 。

令 d 表示将 20 个球投入 5 个罐子总的方法数, 那么 $p = \frac{3!5!4!4!4!}{d}$ 。同理,

$q = \frac{4!4!4!4!4!}{d}$, 则 $\frac{p}{q} = 16$ 。选择 E。

另解: 这道题还可以用“带有重复的排列”来做, 如下:

解答: 令 d 表示将 20 个球投入 5 个罐子总的方法数。现在要求有一个罐子里面 3 个球, 另一个罐子 5 个球, 其他三个是 4 个球, 那么我们先确定哪三个罐子放 4 个球, 一共 C_5^3 种方法, 再确定剩下两个罐子哪个放 3 个球, 哪个放 5 个球, 一

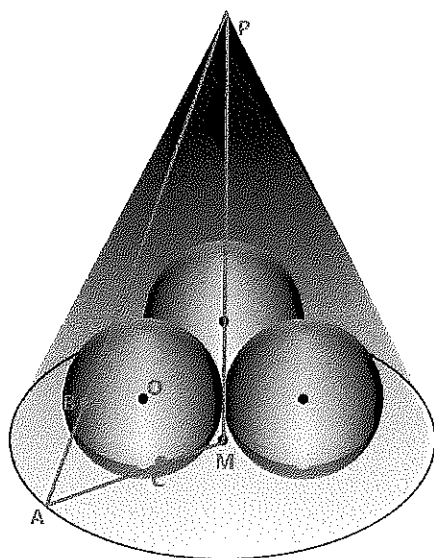
共有 C_2^1 种方法。后续进行带有重复的排列: $\frac{20!}{3!5!4!4!4!}$, 因此 $p = \frac{C_5^3 C_2^1 20!}{d}$ 。同理,

$q = \frac{4!4!4!4!4!}{d}$, 则 $\frac{p}{q} = 16$ 。

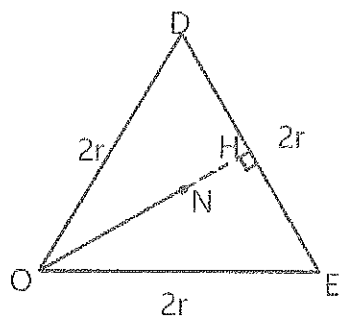
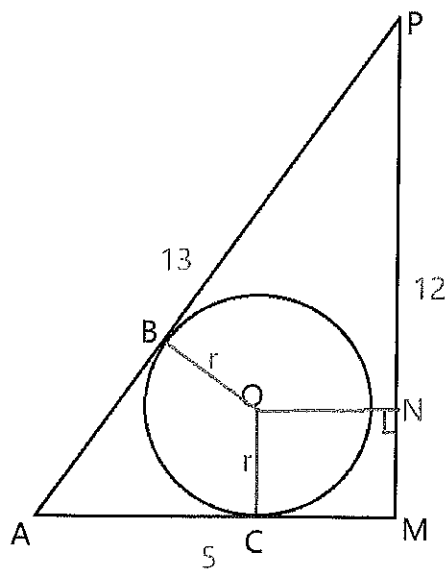
答案: E

第 22 题

考点: 立体几何(选取合适切面转化为平面几何问题的能力)



解答: 涉及到球的立体几何问题, 一般选取的切面要包含球的切点。因此这里选取的切面包含球和圆锥侧面的切点 B, 球和底面的切点 C, 且此平面经过圆锥底面的中心 M 以及球心 O, 如上图 $\triangle PAM$ 所示。所选切面如下:



三个球心所形成的三角形为右图等边 $\triangle ODE$, 高 PM 在此平面的投影 N 恰为等边 $\triangle ODE$ 的中心。由此 $ON = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$ 。再回到左图, 在 $\triangle APM$ 中, 用面积法可以

建立 r 的方程:

$$S_{\triangle PAM} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle POM} + S_{\triangle MOA}, \text{ 即 } 5 \cdot 12 = 13 \cdot r + 12 \cdot \frac{2\sqrt{3}r}{3} + 5r, \text{ 解得, } r = \frac{90 - 40\sqrt{3}}{11}.$$

选择 B.

第 23 题

考点:数论: 因子个数定理

关键思路解析: 此题若采取逆推的方式无法逆推过去, 因为有 50 次迭代. 我们可以先由一些简单的情况入手, 发现规律. 比如, 分别讨论 n 的因子个数为 2, 3, 4... 时, 计算 $f_k(n)$ 的值. 据此发现规律.

解答: 根据因子个数定理, 50 以内的数, 最多有 10 个因子, 为 48. ($48 = 2^4 \cdot 3$)

1. 如果 n 有 2 个因子, $f_1(n) = 4$, $f_1(4) = 6$, $f_1(6) = 8$, $f_1(8) = 8$, 后面一直是 8, 因此 $f_{50}(n) = 8$ 不满足题意. 因此我们发现这样的规律: 到了某个点后, 不论 f_1 作用多少次, 其值不变.

2. 如果 n 有 3 个因子, $f_1(n) = 6$, $f_1(6) = 8$, $f_1(8) = 8$, 后面一直是 8, 因此 $f_{50}(n) = 8$ 不满足题意.

3. 如果 n 有 4 个因子, $f_1(n) = 8$, $f_1(8) = 8$, 后面一直是 8, 因此 $f_{50}(n) = 8$ 不满足题意.

4. 如果 n 有 5 个因子, $f_1(n) = 10$, $f_1(10) = 8$, $f_1(8) = 8$, 后面一直是 8, 因此

$f_{50}(n) = 8$ 不满足题意。

5. 如果 n 有 6 个因子, $f_1(n) = 12$, $f_1(12) = 12$, 后面一直是 12, 因此 $f_{50}(n) = 12$ 满足题意。下面我们算出 1-50 中因子个数为 6 的所有数, 形式为: p^5 或者 $p_1 p_2^2$, 它们是: $2^5 = 32$, $2 \times 3^2 = 18$, $2 \times 5^2 = 50$, $2^2 \times 3 = 12$, $2^2 \times 5 = 20$, $2^2 \times 7 = 28$, $2^2 \times 11 = 44$, $3^2 \times 5 = 45$. 一共 8 个数。

6. 如果 n 有 7 个因子, $f_1(n) = 14$, $f_1(14) = 8$, $f_1(8) = 8$, 后面一直是 8, 因此 $f_{50}(n) = 8$ 不满足题意。

7. 如果 n 有 8 个因子, $f_1(n) = 8$, $f_1(8) = 8$, 后面一直是 8, 因此 $f_{50}(n) = 8$ 不满足题意。

8. 如果 n 有 9 个因子, $f_1(n) = 18$, $f_1(18) = 12$, $f_1(12) = 12$ 后面一直是 12, 因此 $f_{50}(n) = 12$ 满足题意。下面我们算出 1-50 中因子个数为 9 的所有数, 形式为: $p_1^2 p_2^2$, 它们是: $2^2 3^2 = 36$. 总共 1 个。

9. 如果 n 有 10 个因子, $f_1(n) = 20$, $f_1(20) = 12$, $f_1(12) = 12$ 后面一直是 12, 因此 $f_{50}(n) = 12$ 满足题意。下面我们算出 1-50 中因子个数为 10 的所有数, 形式为: $p_1 p_2^4$, 它们是: $2^4 \times 3 = 48$. 总共 1 个。

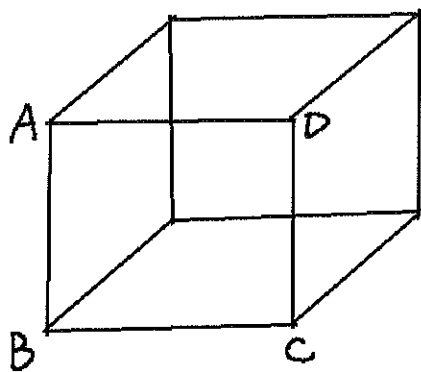
综上, 总共有 10 个满足题意的 n 。

答案: D

第 24 题

考点：排列组合(需要没有重复，没有遗漏的按照既定的规则进行分类讨论)

解答：要求每个面上 4 条棱数字之和为 2，则每个面上的 4 个数字分别是 2 个 0 和 2 个 1. 我们就针对某个面进行分类讨论，如下图立方体的前面这个面.

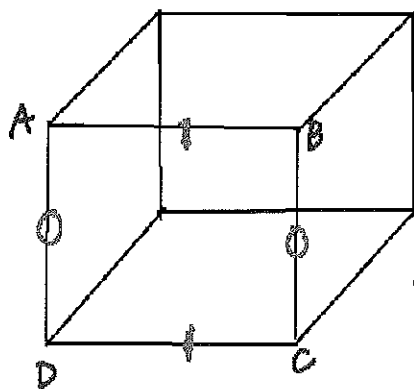


其中的 2 个 1 可能分布在对棱，也可能分布在相邻的棱. 所以我们分 2 大类进行讨论。

1. 若 2 个 1 分布在对棱。

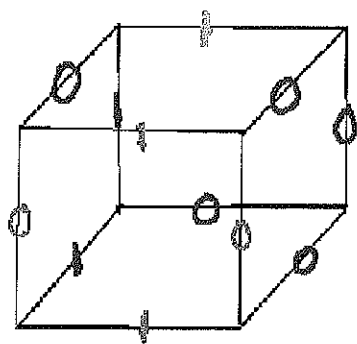
首先，2 个 1 分布在对棱，有 2 种可能性 (AB 和 CD，或者 AD 和 BC)。例如，

两个 1 在 BC 和 AD 两条棱上，如下图

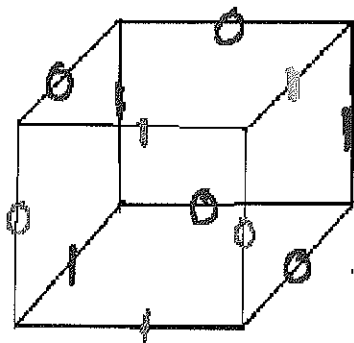


此时上面的面另外一个 1 有 3 个位置可放。可能放在和 AB 相对的棱上,也可能放在和 AB 相邻的棱上(左邻和右邻这 2 种情况相同)。因此下面再分 2 种子情况:

① 若上面的面另外一个 1 放在和 AB 相对的棱上,如下图。则最终会导致右边的面出现 4 个 0, 不符合要求。因此有 0 种。



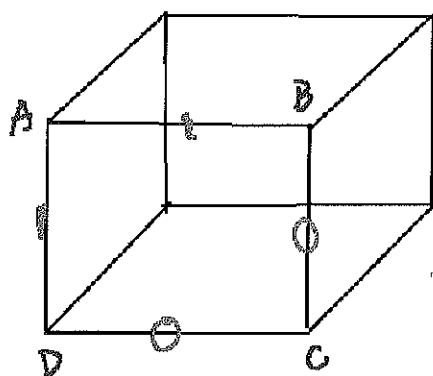
② 若上面的面另外一个 1 放在右邻(或左邻,因为这 2 种情况相同,所以右邻的情况数算出来后要再乘以 2).如下图所示。可以看到,只有 1 种放法。因此上面的面另外一个 1 放在相邻的位置总共有 2 种放法。



总结上述讨论,若前面两个 1 分布在対棱,共有 $2 \times (0 + 2) = 4$ 种方法。

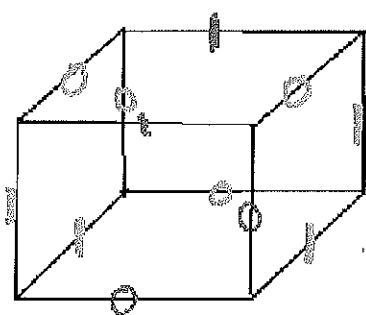
2. 若 2 个 1 分布在相邻的棱。

首先,2 个 1 分布在一个面上相邻的棱,共有 4 种可能性。如下是其中 1 种可能性。

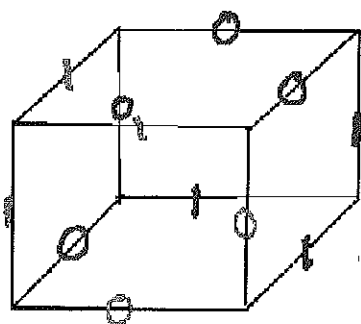


此时再讨论上面的面。类似前面情况的讨论，另外的一个1可能在和AB相对的棱，也可能在左邻或右邻(但这里左邻和右邻的情况不一样，需要分别讨论)。因此分3种子情况讨论。

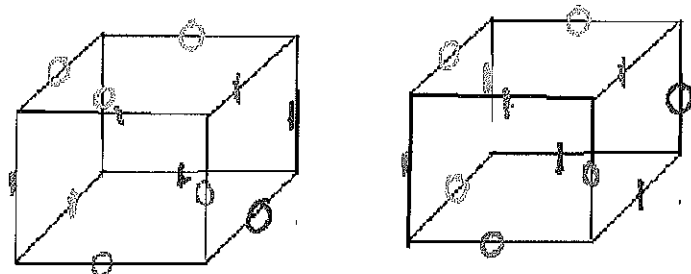
①若上面的面的另外一个1和AB相对，如下所示，只有1种放法。



②若上面的面的另外一个1放在AB的左邻，如下图所示，也只有1种放法。



③若上面的面的另外一个1放在AB的右邻,则这种情况下有如下图所示的2种放法:



因此,当前面的面上的两个1分布在相邻的棱时,有 $4 \times (1+1+2) = 16$ 种放法。

综上所述,2种情况下总共有 $4 + 16 = 20$ 种放法。选择E。

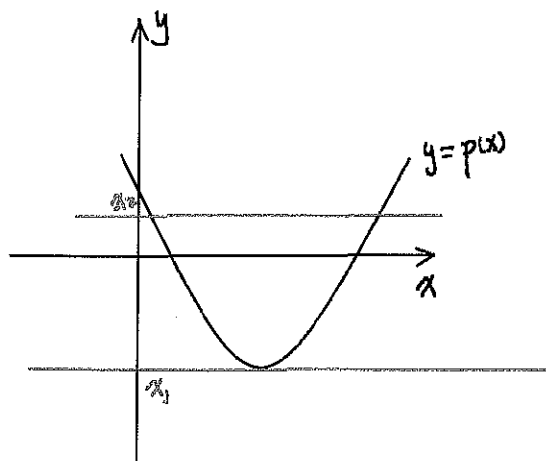
第25题

考点:抽象思维

解答:令 $p(x) = x^2 + bx + c$. 假设 $p(x) = 0$ 的两个根为 $x_1 < x_2$, 其中 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$.

令 $p(x) = m$, 所以 $p(p(x)) = p(m) = 0$, 因此 $m = x_1$ 和 $m = x_2$, 因此, $p(p(x)) = 0$ 这个方程等价于两个方程: $p(x) = x_1$ 或者 $p(x) = x_2$, 因为总共有3个根, 所以如下

图所示:



因此当 $p(x) = x_1$, 即 $x^2 + bx + c - x_1 = 0$ 恰好只有 1 个解, 因此 $\Delta = b^2 - 4(c - x_1) = 0$,

而 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$, 代入, 得到, $b^2 - 4(c - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}) = 0$, 化简得到,

$b^2 - 4c - 2b - 2\sqrt{b^2 - 4c} = 0$, 令 $k = \sqrt{b^2 - 4c}$, 所以 $2b = k^2 - 2k = (k-1)^2 - 1 \geq -1$,

$b \geq -\frac{1}{2}$, 则 $p(x) = x^2 + bx + c$ 的根之和最大值为 $x_1 + x_2 = -b \leq \frac{1}{2}$, 取最大值时,

$b = -\frac{1}{2}$, 此时 $k = 1$, 即 $\sqrt{b^2 - 4c} = 1$, 解得, $c = -\frac{3}{16}$, 因此 $\tilde{p}(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$, 那

么 $\tilde{p}(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$, 选择 A.