

2021 AMC10B 春季试题解答

第1题

考点: 绝对值不等式

$|x| < 3\pi \iff -3\pi < x < 3\pi$. 因为 π 约等于 3.14, 3π 约等于 9.42. 所以 $-9.42 < x < 9.42$, 这里 $x \in \mathbb{Z}$. 对于 $x \in \mathbb{Z}$, $-9.42 < x < 9.42 \implies -9 \leq x \leq 9$, 那么 x 的整数值可以取 $9 - (-9) + 1 = 19$ 个. 所以答案是 (D) 19.

第2题

考点: 简单算术

原式 $= |3 - 2\sqrt{3}| + |3 + 2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 3 + 3 + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, 选 D

第3题

考点: 简单列方程解应用题

设这个课程中有 x 位高二学生, 则高三学生数为 $28 - x$ 个. 因为参加辩论队的高二学生数和高三学生数相同, 因此, $0.25 \cdot x = 0.1 \cdot (28 - x)$, 所以, $0.25x + 0.1x = 2.8$, $x = 8$, 所以有 8 人, 选 C

第4题

考点: 简单算术

一共有 46 个穿蓝色衬衫的学生相互配对, 所以其他 11 个穿蓝色衬衫的学生一定是和 11 个穿黄色衬衫的学生互相配对. 那么还剩 64 个穿黄色衬衫的学生相互配

对, 一共成 $\frac{64}{2} = \boxed{(B) 32}$ 对。

第5题

考点: 简单数论

由于他们的年龄都是1位正整数, 因此, $24 = 4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$ 以及 $30 = 5 \cdot 6$, 但因为这4人的年龄各不同, 因此这4人年龄为3, 8, 5, 6. 他们的年龄和为22. 答案选B.

第6题

考点: 简单统计.

设上午班的学生数为 $3x$, 下午班的学生数是 $4x$. 那么学生总人数是

$3x + 4x = 7x$. 则所有学生分数的平均值为 $\frac{3x \cdot 84 + 4x \cdot 70}{7x} = 76$. 因此, 答

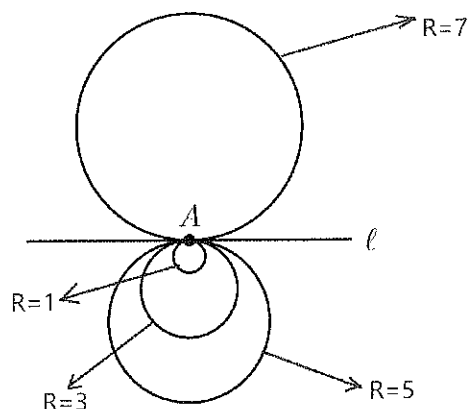
案是 $\boxed{(C) 76}$

第7题

考点: 平面几何

要使得S的面积尽可能大, 那么半径为7的圆内部不应该有其他圆. 而其他圆都

画在另一边, 因此画出如下图形:

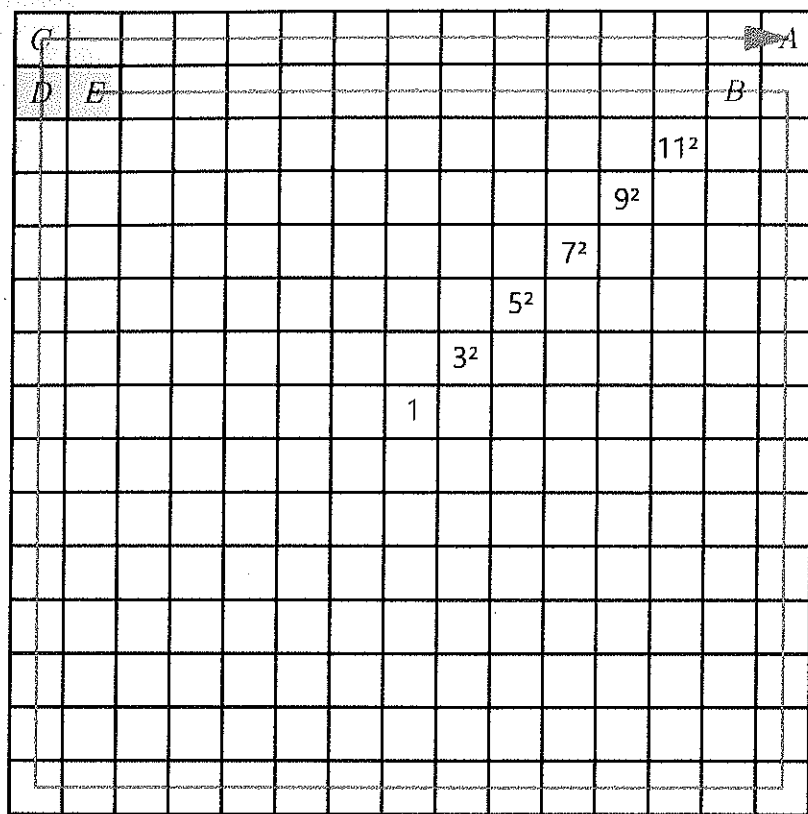


则 S 为图中阴影部分面积。求得, $S = \pi \cdot 7^2 + (\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2) = 65\pi$. 而选项中 65π 即为最大, 所以选 E.

第 8 题

考点: 数列, 观察规律

通过观察表中数字我们可以看到, 从中心的 1 向右上的对角线中, 都是连续奇数的平方, 如下图所示. 因此 $B = 13^2 = 169$, $A = 15^2 = 225$, 所以 $C = 225 - 14 = 211$, 则 $D = 211 - 1 = 210$. 此即为第二行中最大的数。而第二行中最小的数为 $E = B - 12 = 169 - 12 = 157$. 所以最大数和最小数之和为 $D + E = 210 + 157 = 367$, 选择 A.



第 9 题

考点：几何变换，旋转和平移

我们可以由最后的结果 $(-6, 3)$ 再倒推至点 $P(a, b)$. 因为一个点 (x, y) 关于直线 $y = -x$ 的对称点为 $(-y, -x)$. 因此 $(-6, 3)$ 关于 $y = -x$ 的对称点为 $(-3, 6)$. 然后再把 $(-3, 6)$ 顺时针绕着 $(1, 5)$ 旋转 90° . 对于这一点, 我们可以这样做: 1. 首先把 $(-3, 6)$ 和 $(1, 5)$ 先向左平移 1 个单位, 再向下平移 5 个单位, 使得 $(1, 5)$ 与原点 $(0, 0)$ 重合, 那么 $(-3, 6)$ 就变成了 $(-4, 1)$, $(-4, 1)$ 绕着 $(0, 0)$ 顺时针旋转 90° , 得到 $(1, 4)$, 再把 $(1, 4)$ 向右平移 1 个单位, 再向上平移 5 个单位, 得到 $(2, 9)$, 这便是 $P(a, b)$. $b - a = 9 - 2 = 7$. 因此答案是 D.

第 10 题

考点: 立体几何: 圆锥和圆柱体的体积公式

圆锥体的体积公式为 $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, 其中 r 为底面半径, h 为高。因为水充满了整个

个椎体, 因此水的体积为 $\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 144\pi = 6 \cdot 144\pi$ 。

圆柱体的体积公式为 $\pi \cdot r^2 \cdot h$, 所以圆柱体中水的体积为 $24 \cdot 24 \cdot \pi \cdot h$ 。我们让这两个表达式相等, 因为圆锥体和圆柱体中水的体积不变, 因此

$24 \cdot 24 \cdot \pi \cdot h = 6 \cdot 144\pi$, 得, $4h = 6$, 那么 $h = \frac{6}{4}$ 。所以答案是 $1.5 = \boxed{(A)}$ 。

第 11 题

考点: 数论: SFFT 类型的不定方程(双语教材数论章节有介绍)

设沿着长方形的长边共有 x 块蛋糕, 沿着长方形的宽共有 y 块蛋糕。根据内部的蛋糕数和沿着长方形边缘的蛋糕数一样, 即边缘的蛋糕数是总数的一半, 可以建立

关于 x 和 y 的不定方程: $2(x+y)-4 = \frac{1}{2} \cdot xy$, 运用 SFFT, 分解因式, 得到,

$$(x-4)(y-4) = 8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2, \text{ 因此 } \begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}.$$

总数 xy 的最大值是 60。选择 D。

第 12 题

考点: 数论: 因子个数定理

(店铺(<https://shuxuekecheng.taobao.com>))内 AMC10/12 双语教材中关于这部分有讲解, 并拓展了很多其他公式和知识点)

对 N 进行质因数分解得到 $N = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17^2$ 。 N 的奇数因子之和为

$S_{\text{odd}} = (1+3^1+3^2+\dots+3^5)(1+5)(1+7)(1+17+17^2)$, 而所有因子之和为:

$$S = (1+2+2^2+2^3)(1+3^1+3^2+\dots+3^5)(1+5)(1+7)(1+17+17^2) \\ = 15(1+3^1+3^2+\dots+3^5)(1+5)(1+7)(1+17+17^2),$$

所以偶数因子之和为:

$$S_{\text{even}} = S - S_{\text{odd}} = 14(1+3^1+3^2+\dots+3^5)(1+5)(1+7)(1+17+17^2) = 14S_{\text{odd}},$$

那么 $\frac{S_{\text{odd}}}{S_{\text{even}}} = \frac{1}{14}$, 选 C

第 13 题

考点: 数论: 进制转换

根据题目意思, 把其他进制的数都转成 10 进制, 列方程, 后面就是解方程了.

所以这道题是考察最基本的进制转化.

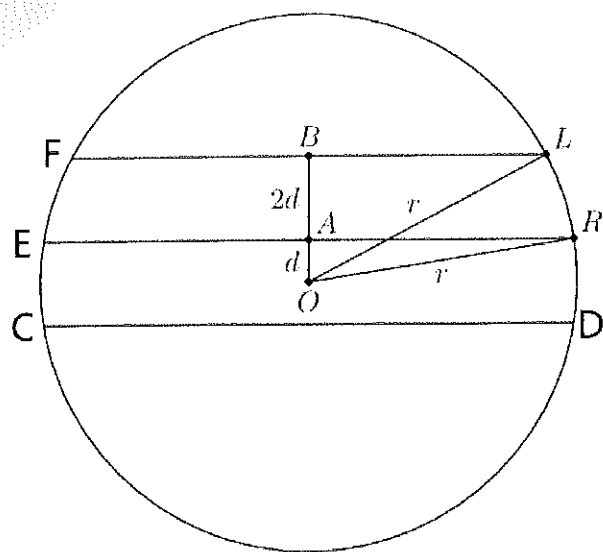
解答:

$$\begin{cases} (32d)_n = 263 \\ (324)_n = (11d1)_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot n^2 + 2n + d = 263 \\ 3 \cdot n^2 + 2n + 4 = 1 \cdot 216 + 1 \cdot 36 + 6d + 1 \end{cases} \quad \text{解得, } d=2, n=9.$$

选择 B.

第 14 题

考点: 平面几何: 垂径定理



如图, $ER = CD = 38, FL = 34$. 过圆心 O 作 $OB \perp FL$ 于 B 且交 ER 于 A . 由垂径定理, $BL = 17, AR = 19$. 在直角三角形 OBL 和 OAR 中, 由勾股定理, 得到, $17^2 + (3d)^2 = r^2$ 且 $19^2 + d^2 = r^2$. 则 $17^2 + (3d)^2 = 19^2 + d^2$, 解得, $d = 3$. 因此两平行线之间的距离是 $2d = 6$. 选择 B

第 15 题

考点: 代数变形

$$\begin{aligned} \text{因为 } x^{11} - 7x^7 + x^3 &= x^7 \left(x^4 - 7 + \frac{1}{x^4} \right) = x^7 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 9 \right] = x^7 \left[\left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \right)^2 - 9 \right] \\ &= x^7 [(5-2)^2 - 9] = 0, \text{ 因此选择 B.} \end{aligned}$$

第 16 题

考点: 数论: 整除规则.

关键思路解析: 要能被 15 整除, 就需要能够同时被 3 和 5 整除. 因为 0 不能出现在升数 (uphill integers) 里, 所以最后一位必定是 5. 其他位的数字只能从 1, 2, 3,

4 中选择.下面需要对这个整数的数字位数进行讨论.

解答:

1. 若是 1 位数, 即 5, 不能被 3 整除, 舍去.
2. 若是 2 位数, 因为 $5 \equiv 2(\text{mod } 3)$, 所以应该从 1, 2, 3, 4 中选择模 3 余 1 的, 只有 1, 4. 所有共有 2 种情况.
3. 若是 3 位数, 因为 $5 \equiv 2(\text{mod } 3)$, 所以十位和百位之和模 3 应该为 1, 则应该一个模 3 余 0, 另一个余 1, 是 1 和 3 或者 3 和 4. 所有共有 2 种情况.
4. 若是 4 位数, 分别列出所有的升数: 2345, 1345, 1245, 1235. 其中是 3 的倍数只有 1245, 所以 1 种.
5. 若是 5 位数, 只能是 12345, 这个数是 15 的倍数, 1 种情况.

综上, 总共 6 种情况.

Answer: C

第 17 题

考点: 逻辑推理

这里的关键是选择合适的某个人的分数进行分析, 原则是讨论的情况数最少. 这里我们从 Kim 的分数 17 分入手分析, 因为他的 2 张牌可能性只有 2 个: 8 和 9, 或者 7 和 10.

1. 若是 7 和 10 则会得到矛盾. 因为此时没有 2 张牌可以相加得到 Tyrone 的 16 分.
2. 若是 8 和 9, 那么 Tyrone 的 16 分只可能是 6 和 10, Ravon 的 11 分只能是 4 和 7, 此时还剩下 1, 2, 3, 5, 则 Oscar 的 4 分是 1 和 3, Aditi 的 7 分是 2 和 5. 因此选择 C

第 18 题

考点: 概率: 条件概率或者状态方法.

这里介绍 2 种方法. 第一种方法是条件概率, 第二种方法是使用状态. 这道题更严格的方法是使用状态.

方法 1: 条件概率

第一个出现的是 3 个偶数中的一个, 概率为 $\frac{1}{2}$, 接着应该出现剩下 2 个偶数中的一个, 概率为 $\frac{2}{5}$, 最后应该出现最后一个剩下的偶数, 概率为 $\frac{1}{4}$. 所以总的概率为 $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

上述方法可能很多同学觉得不太严格. 那么我们下面介绍这道题更一般且更严格的解法: 使用状态. 因为这道题在不同的状态间切换.

方法 2: 状态

令 E_1 为表示还差 1 个不同的偶数才能到达题设条件的概率, E_2 为表示还差 2 个不同的偶数才能到达题设条件的概率, E_3 为表示还差 3 个不同的偶数才能到达题设条件的概率 (即题设要求的概率).

下面我们列出关于这 3 个未知量的方程.

对于 E_1 , 表明已经出现了 2 个不同的偶数, 例如 2 和 4, 那么要求取 E_1 这个概率, 我们分情况讨论.

1. 可能下一次出现的还是 2 或 4, 概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 此时状态还是停留在 E_1 , 因此概率为 $\frac{1}{3}E_1$.
2. 可能下次出现的是一个偶数 6, 概率为 $\frac{1}{6}$, 此时状态到了题设条件. 因此概率为 $\frac{1}{6}$.
3. 可能下次出现的是一个奇数, 概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 则此时不可能再到题设条件, 因

此概率为 $\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

综上, $E_1 = \frac{1}{3}E_1 + \frac{1}{6}$

同理, 还可以建立如下 2 个方程:

$$\begin{cases} E_2 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{6}E_2 + \frac{2}{6}E_1 \\ E_3 = \frac{1}{2}E_2 \end{cases}$$

解上述三个方程, 可得,

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{4} \\ E_2 = \frac{1}{10} \\ E_3 = \frac{1}{20} \end{cases}$$

因为 $E_3 = \frac{1}{20}$, 因此答案选 C.

第 19 题

考点: 简单统计

假设除了最大数和最小数之外的其余的整数之和为 x , 且这些其余的数一共有 n

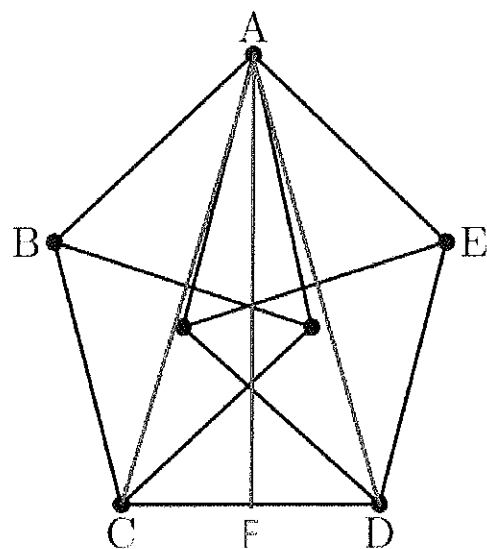
个, 最小的数为 y , 则最大的数为 $y+72$. 所以得到以下方程:

$$\begin{cases} x+y=32(n+1) \\ x=35n \\ x+y+72=40(n+1) \end{cases} \quad \text{解得, } \begin{cases} x=280 \\ y=8 \\ n=8 \end{cases}, \text{ 因此 } S \text{ 中所有整数的平均值}$$

为: $\frac{y+y+72+x}{n+2} = \frac{16+72+280}{10} = 36.8$, 选择 D.

第 20 题

考点: 平面几何: 余弦定理



连接 AC 和 AD. 则五边形被分成了 3 个等腰三角形. 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $AB=BC=2$,

$\angle ABC = 120^\circ$, 所以根据余弦定理, $AC = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{3}$, 同理,

$AD = 2\sqrt{3}$. 过 A 作 $AF \perp CD$, 则在直角三角形 ACF 中,

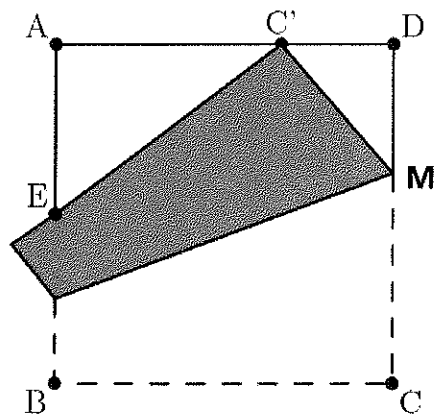
$AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = \sqrt{12 - 1} = \sqrt{11}$. 所以五边形的面积为:

$$S = 2S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC + \frac{1}{2} CD \cdot AF = 4 \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{11} = \sqrt{12} + \sqrt{11}$$

$m+n=23$. 选择 D.

第 21 题

考点: 平面几何: 相似三角形, 勾股定理



关键思路解析: 这里存在相似三角形: $\triangle AC'E \sim \triangle DMC'$, 则两者周长比等于对应边长比. 我们只要求出 $\triangle DMC'$ 以及 $\triangle AC'E$ 的一条边就可. 可假设 $CM=C'M=x$, 放在直角三角形 DMC' 运用勾股定理即可得到关于 x 的方程, 解出 x 即可.

解答: 设 $CM=C'M=x$, 则 $DM=1-x$, 在直角三角形 DMC' 中, 应用勾股定理, 得到,

$(\frac{1}{3})^2 + (1-x)^2 = x^2$, 得到, $x = \frac{5}{9}$, 因此直角三角形 DMC' 三条边分别为 $5/9, 4/9, 1/3$,

周长为 $4/3$; 而 $\triangle AC'E$ 的一条边 $AC'=1-C'D=2/3$, 所以 $\frac{P_{\triangle AC'E}}{P_{\triangle DCM}} = \frac{AC'}{DM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$,

因此 $P_{\triangle AC'E} = \frac{3}{2} P_{\triangle DCM} = 2$, 选择 A.

第 22 题

考点: 排列组合: PIE

关键思路解析: 如果集合(set) A 表示 Box A 里面 3 个颜色相同, B 表示 Box B 里面颜色相同, ..., E 表示 Box E 里面颜色相同, 那么题目即要求 $A \cup B \cup C \cup D \cup E$.

根据 PIE,

$$A \cup B \cup C \cup D \cup E = A + B + C + D + E - (A \cap B + A \cap C + A \cap D + \dots) + (A \cap B \cap C + A \cap B \cap D + B \cap C \cap D + \dots) - (A \cap B \cap C \cap D + \dots) + (A \cap B \cap C \cap D \cap E)$$

下面分别求右边各个式子即可.

解答:

1. 先求 $A+B+C+D+E$: 这代表 Box A 里面颜色相同, 其他 Box 里的颜色不关心的方法数加上 Box B 里面颜色相同, 其他 Box 里的颜色不关心的方法数..., 或者 Box E 里面颜色相同, 其他 Box 里的颜色不关心的方法数. 因为这每种情况方法数都一样, 所以我们只要算出 Box A 里面颜色相同, 其他 Box 里的颜色不关心

的方法数,再乘5就行:第一步,选择A里面相同的颜色是哪一种颜色,5种方法,第二步,其他4个Box颜色随便排, $4! \times 4! \times 4!$ 种方法,所以总共的方法数是:
 $(5 \times 4! \times 4! \times 4!) \times 5$.

2. 再求 $A \cap B + A \cap C + A \cap D + \dots$: 这代表至少2个Box颜色一样的方法数. 第一步,先选定哪2个Box里颜色一样, $C_5^2 = 10$ 种方法;第二步,从5个颜色里选择2个颜色给这2个Box,并且有序分配,有 $A_5^2 = 20$ 种方法. 第三步,其他Box颜色不管,总共有 $3! \times 3! \times 3!$ 种方法. 所以总的方法数是: $10 \times 20 \times 3! \times 3! \times 3!$ 种方法.

3. 求 $A \cap B \cap C + \dots$: 这代表至少3个Box颜色相同: 类似的分析方法,得到总的方法数: $C_5^3 \times A_5^3 \times 2! \times 2! \times 2! = 10 \times 60 \times 2! \times 2! \times 2!$

4. 再求 $A \cap B \cap C \cap D + \dots$: 这代表至少有4个Box里面的颜色相同. 类似的分析方法,得到总的方法数: $C_5^4 \times A_5^4 \times 1! \times 1! \times 1! = 5 \times 120 = 600$

5. 最后求: $A \cap B \cap C \cap D \cap E$: 表示5个Box里的颜色全部一样,一共是 $5! = 120$ 种.

那么概率为:

$$P = \frac{25 \times 4! \times 4! \times 4! - 200 \times 3! \times 3! \times 3! + 600 \times 8 - 600 + 120}{5! \times 5! \times 5!}$$

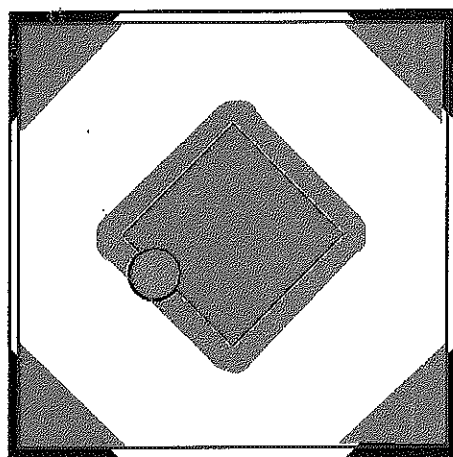
$$= \frac{1400 \times 6 \times 6 \times 6 + 4320}{120 \times 120 \times 120} = \frac{71}{400}$$

所以 $400 + 71 = 471$.

Answer : D

第23题

考点: 几何概率



关键思路解析:要满足硬币能盖住部分黑色区域,硬币的圆心所在区域如上图红色区域所示,有4个位于角落的等腰直角三角形(直角边长为 $(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$),和中间红色正方形区域(由原来黑色正方形的边向外拓展 $1/2$ 长度形成.还需注意4个角均为 $1/4$ 圆,圆的半径为 $1/2$).而总的硬币圆心可以活动的区域(不让硬币露出最大的正方形区域)是把原来大的正方形4条边向内缩 $1/2$ 形成,即边长为7的正方形,如上图蓝色正方形所示.那么把这些红色区域面积加起来除以整个边长为7的正方形的面积,便是概率.

解答:4个红色三角形面积为: $4 \times (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times (\frac{3}{2} + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$

中间红色圆角正方形的面积为:

$$\begin{aligned} & 2 \times (2\sqrt{2} + 1) \times 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2})^2 + \pi(\frac{1}{2})^2 \\ &= 16 + 4\sqrt{2} - 8 + \frac{\pi}{4} \\ &= 8 + 4\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

所以概率为

$$P = \frac{8 + 4\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 3 + 2\sqrt{2}}{49} = \frac{11 + 6\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}}{49} = \frac{44 + 24\sqrt{2} + \pi}{196}$$

$$a=44, b=24, a+b=68$$

Answer: C

第 24 题

考点: 逻辑推理

要保证某个人赢, 必定要按照某种既定的策略去做. 注意到这里规定每个人只能一次要么拿 1 个, 要么拿 2 个, 所以可能的策略是一个人模仿另一个拿同样的个数, 或者说, 另一个拿的个数保证每个回合两人的总数不变, 这 2 种策略. 经过尝试, 发现, “若轮到某个人时, 留给他的布局是对称的, 那么他就输了”. 例如, 若轮到 Beth, 他所面对的如果是如下对称布局:

$$(2, 1, 2, 1)$$

那么无论 Beth 怎么拿, Arjun 只要模仿 Beth 拿, 那么 Arjun 一定能赢. 例如, Beth 那走第一个 1, 那么 Arjun 就拿走最后一个 1, 布局变成 (2, 2), 这又是个对称布局, 若此时 Beth 拿走右边两块砖块其中 1 个, 变成 (2, 1), 那么 Arjun 就对称地拿走左边 2 块砖块其中 1 个, 变成 (1, 1). 最后这个对称布局再留给 Beth, 结果肯定是 Beth 输, Arjun 赢了.

所以下面我们分别依次考察选项布局.

- A. (6, 1, 1). 若 Arjun 首先同时拿走从左往右数的第 3 第 4 块砖, 留给 Beth 的布局变成 (2, 2, 1, 1). 这是个对称布局, Beth 必定输.
- B. (6, 2, 1). 对于 Arjun 来说, 这个布局他无法通过一次性拿走若干块砖使之变成对称. 但是无论第一步 Arjun 怎么拿, Beth 都能使之变成对称, 留给 Arjun, 最

终 Beth 赢.例如,若 Arjun 拿第 3 块,变成 $(2,3,2,1)$,则 Beth 就拿走 3 块砖中的其中 2 块,变成对称布局 $(2,1,2,1)$ 留给 Arjun, Arjun 最后就输了.

C. $(6,2,2)$. Arjun 第一步可以同时拿走从左往右数的第 3 第 4 块砖,留给 Beth 的布局变成 $(2,2,2,2)$.这是个对称布局, Beth 必定输.

D. $(6,3,1)$. Arjun 第一步可以同时拿走从左往右数的第 4 第 5 块砖,留给 Beth 的布局变成 $(3,1,3,1)$.这是个对称布局, Beth 必定输.

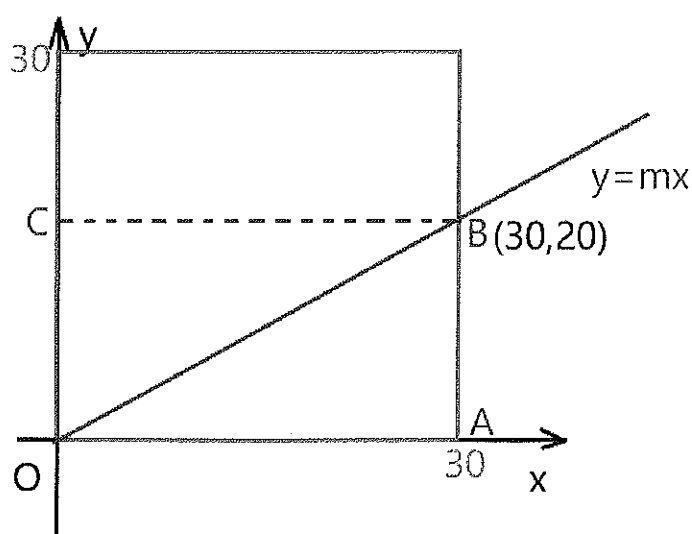
E. $(6,3,2)$. Arjun 第一步可以拿走从左往右数的第 4 块,留给 Beth 的布局变成 $(3,2,3,2)$.这是个对称布局, Beth 必定输.

因此能够保证 Beth 赢的只有选项 B.答案选择 B.

第 25 题

考点:数形结合的思想方法.

我们先粗略确定当直线上或下方恰好有 300 个点时,直线的大致位置,然后再细微调整.



如上图,直线 OB 为 $y=mx$. OB 上或下方有 300 个点,因此矩形 OCBA 内即存

在 600 个点, 而矩形的长 OA 上存在 30 个点, 因此宽边 AB 上应该存在 20 个点, 所以 B 的坐标为 B(30,20). 由此 OB 的直线方程为 $y = \frac{2}{3}x$. 这只是粗略确定了点的个数. 直线 $y = \frac{2}{3}x$ 上或下方到底存在多少个点需要进一步准确确定. 若不足或超过 300 个点, 则需要将 OB 绕着 O 点旋转做细微调整.

因为 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \frac{16}{24} = \frac{18}{27} = \frac{20}{30}$, 因此在直线 $y = \frac{2}{3}x$ 上的点有 (3,2), (6,4), (9,6), (12,8), (15,10), (18,12), (21,14), (24,16), (27,18), (30,20) 总共 10 个. 以这些点为临界点, 可以确定所有在直线上或者下方的点的个数.

当横坐标 $x=30$ 时, 纵坐标 y 可以取 1~20; 当横坐标 $x=29$ 时, y 可以取 1~19; 因为 $x=27$ 时, $y=1\sim 18$, 因此 $x=28$ 时, $y=1\sim 18$; 类似这样, 可以继续由直线上 2 个临界的整数点, 确定他们之间的点的个数, 得到下表:

横坐标 x	纵坐标 y	点的个数
30	1~20	20 个
29	1~19	19 个
28	1~18	18 个
27	1~18	18 个
26	1~17	17 个
25	1~16	16 个
24	1~16	16 个
23	1~15	15 个
22	1~14	14 个
21	1~14	14 个
...	...	..

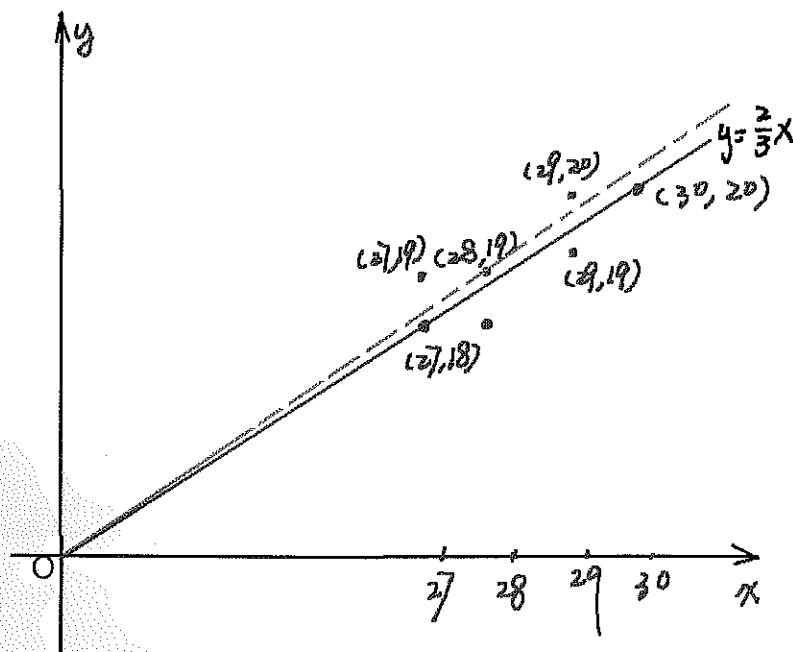
6	1~4	4 个
5	1~3	3 个
4	1~2	2 个
3	1~2	2 个
2	1	1 个
1	不存在	0 个

将第 3 列点的个数全部加起来即为点的总数，为

$$(1+3+5+\dots+15+17+19)+2(2+4+6+8+\dots+14+16+18)+20=\frac{20\cdot 10}{2}+20\cdot 9+20=300$$

恰为 300 个。

直线 OB 不能绕着 O 点顺时针转了，不然点数会少于 300 个。所以 OB 还能绕着 O 点逆时针转动，且需要保证转动过程中没有新的点跑到直线上或者下方。最有可能先跑到直线上的新的点是离开 O 越远的点。所以我们只需要考察离 O 较远的点(即 x 坐标较大的点)，保证它们不位于直线上即可。



上图显示了，当直线 $y = \frac{2}{3}x$ 绕着 O 点逆时针旋转时，首先会碰到的点是 (28, 19)，

但不能通过这个点，否则将有 301 个点在直线上或者下方。所以直线 $y=mx$ 只能

在 $y=\frac{2}{3}x$ 和 $y=\frac{19}{28}x$ 之间，因此 m 的范围为 $\frac{2}{3} \leq m < \frac{19}{28}$ 。那么 $\frac{a}{b} = \frac{19}{28} - \frac{2}{3} = \frac{1}{84}$ ，

$1+84=85$ ，选择 E。