

2021 AMC10B 秋季试题解答

第1题

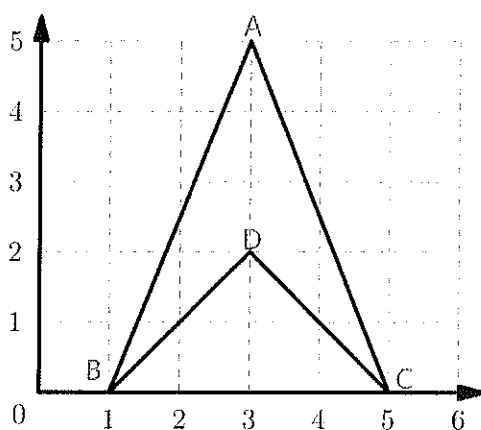
考点: 简单算术

解答: $1234 + 2341 + 3412 + 4123 = 3575 + 7535 = 11110$, 选择 E

第2题

考点: 简单几何

解答: 如下图, $S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 10 - 4 = 6$, 选择 B.



第3题

考点: 简单代数(平方差公式)+数论(质因数分解和整除规则)

解答: $\frac{2021}{2020} - \frac{2020}{2021} = \frac{2021^2 - 2020^2}{2020 \cdot 2021} = \frac{(2021 + 2020)(2021 - 2020)}{2020 \cdot 2021} = \frac{4041}{2020 \cdot 2021}$, 因

此 $p=4041$. 选 E.

第4题

考点: 简单算术

解答: 假设中午时, St.Louis 的气温是 x 摄氏度, 则 Minneapolis 的气温是 $x+N$ 摄氏度。4 点时, Minneapolis 的气温是 $x+N-5$, 而 St.Louis 的气温是 $x+3$. 因为两者气温差为 2 摄氏度, 则 $|(x+N-5)-(x+3)|=2$, 即 $|N-8|=2$, $N=10$ 或者 6. 因此 $10 \times 6=60$.
选择 C

第 5 题

考点: 幂的运算

解答: $\frac{n}{4} = \frac{8^{2022}}{4} = \frac{2^{6066}}{2^2} = 2^{6064} = 4^{3032}$, 选择 E

第 6 题

考点: 因子个数定理

解答: 因为 $2021=43 \cdot 47$, 根据因子个数定理, 所以这个最小的正整数是 $2^{46} \cdot 3^{42} = 6^{42} \cdot 2^4 = 16 \cdot 6^{42}$. 因此 $m=16, k=42$. 那么 $m+k=58$. 选择 B

第 7 题

考点: 数论(两个最简分数相加, 若分母不同, 则和不为整数)

解答: 所有的特殊分数是

$$\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{3}{12}, \frac{4}{11}, \frac{5}{10}, \frac{6}{9}, \frac{7}{8}, \frac{8}{7}, \frac{9}{6}, \frac{10}{5}, \frac{11}{4}, \frac{12}{3}, \frac{13}{2}, \frac{14}{1}.$$

我们将它们写成最简形式如下:

$$\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{1}{4}, \frac{4}{11}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, 1\frac{1}{7}, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{3}{4}, 4, 6\frac{1}{2}, 14.$$

注意到若两个最简分数的分母不同,则它们的和不是整数。因此,我们只需考虑上述最简分数中,分母相同的两个分数相加即可。

对于集合 $\{2, 4, 14\}$, 其中 2 个元素 (不一定不同) 和为 4, 6, 8, 16, 18, 28。

对于集合 $\left\{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right\}$, 其中 2 个元素 (不一定不同) 和为 1, 2, 3, 7, 8, 13。

对于集合 $\left\{\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}\right\}$, 其中 2 个元素 (不一定不同) 和为 3。

综上, 一共有 (C) 11 个不同的整数, 可以写成 2 个不必要不同的特殊分数之和: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 16, 18, 28。

第 8 题

考点: 数论: 质因数分解

解答: $16383 = 16384 - 1 = 2^{14} - 1 = (2^7 + 1)(2^7 - 1) = 129 \cdot 127 = 3 \cdot 43 \cdot 127$, 最大质因数为 127, 因此 $1+2+7=10$, 选 C。

第 9 题

考点: 代数(比例)

解答: 假设这个王国的骑士总数是 $7x$ 个, 那么红色骑士是 $2x$ 个, 蓝色骑士是 $5x$ 个。设红色骑士中魔法骑士的比例是 y , 那么蓝色骑士中魔法骑士的比例则为 $\frac{y}{2}$ 。

因此红色骑士中魔法骑士的个数为 $2xy$, 蓝色骑士中魔法骑士的个数为

$55x \cdot \frac{y}{2} = \frac{5}{2}xy$, 则魔法骑士的总数为 $\frac{5}{2}xy + 2xy = \frac{9}{2}xy$ 。因为魔法骑士占骑士总数

$\frac{1}{6}$, 因此, $\frac{9}{2}xy = \frac{1}{6} \cdot 7x$, 解得, $y = \frac{7}{27}$, 选择 C

第 10 题

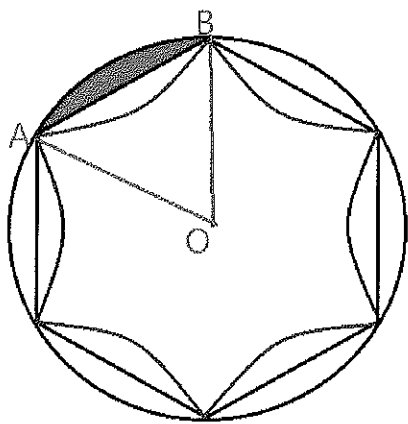
考点: 逻辑推理

解答: 由 Alice 说的“我不知道谁的数更大一些。”可以推断, Alice 抽到的数为 2 到 39 之间 (包含 2 和 39)。而知道了这个信息之后, Bob 说自己能确定谁的数最大, 说明 Bob 抽到的数为 1, 2, 39 和 40 其中一个。又因为 Bob 的数是个质数, 因此 Bob 抽到的数是 2。假设 Alice 抽到的数是 x ($3 \leq x \leq 39$), 则 $200+x$ 是完全平方数, 则 $x=25$ 。那么抽到的 2 个数之和为 $25+2=27$, 选 A。

第 11 题

考点: 平面几何

解答:



要求的区域的面积可以看成是圆的面积减去图中月牙形阴影面积的 12 倍。因为

$\triangle AOB$ 是个等边三角形, 而 $AB=1$, 因此 $AO=BO=1$, 即圆的半径为 1。那么扇形

OAB 的面积为 $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{1}{6}\pi$, $\triangle AOB$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 那么月牙形阴影部

分面积是: $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$, 那么题中要求区域的面积为 $S = \pi - 12(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = 3\sqrt{3} - \pi$.

选择 B.

第 12 题

考点: 逻辑推理(充要条件)

解答: 对每个选项, 我们首先将符合选项条件的特殊值代入方程检验, 若不符合方程, 则选项错误. 若符合, 再去证明正确性。

对于 A, 令 $x=2, y=z=-1$, 代入方程, 得到, $6+3=1$ 矛盾, 因此 A 错误。

对于 B, 令 $z=0, y=-1, x=-2$, 代入方程得到, $2+1=1$ 矛盾, 因此 B 错误。

对于 C, 令 $z=0, x=1, y=2$, 代入方程, $-1+4=1$ 矛盾, 因此 C 错误。

对于 D, 令 $x=z=1, y=2$, 代入方程, $-1+2=1$ 符合方程, 但这并非代表 D 是正确的。我们先跳过 D, 看 E。

对于 E, 令 $x=y=-1, z=3$, 代入方程 $4+12=1$ 矛盾, 因此 E 错误。

排除法可得, **D 是正确的, 选择 D**。实际上, 可以证明 D 是正确的。因为

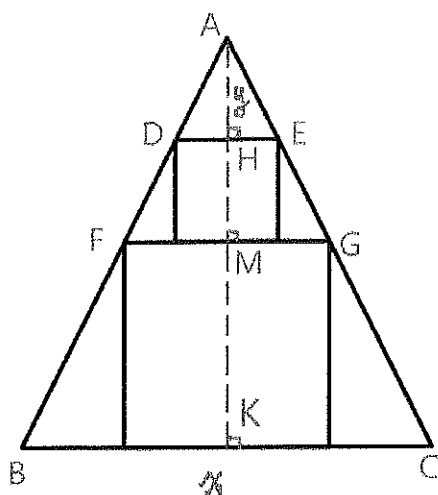
(D) $x=z$ 且 $y-1=x$, 所以 $x-y=-1, y-z=y-x=1, z-x=0$, 那么

$x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)=x(x-y)+y(y-z)=x(-1)+y(1)=y-x=1$ 得证。

第 13 题

考点: 平面几何(相似三角形)

解答:



过 A 作 $AK \perp BC$ 于 K, 且分别交 DE 和 FG 于 H、M。设 $BC = x$, $AH = y$ 。则我们

分别求出 x 和 y 即可。因为 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 所以 $\frac{DE}{BC} = \frac{AH}{AK}$, 即 $\frac{2}{x} = \frac{y}{y+5}$ 。因

为 $\triangle AFG \sim \triangle ABC$, 所以 $\frac{FG}{BC} = \frac{AM}{AK}$, 即 $\frac{3}{x} = \frac{y+2}{y+5}$, 解这 2 个方程, 得, $x = \frac{9}{2}$, $y = 4$ 。

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot x(y+5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (9) = \frac{81}{4}$, 选择 B

第 14 题

考点: 概率: 反面考虑

解答: 乘积能被 4 整除有比较多的情况, 正面考虑情况太多, 我们反面考虑: 不能被 4 整除的概率, 情况会少很多。

不能被 4 整除, 表明不含有 4, 且最多只有 1 个偶数。下面分 3 种情况讨论:

- ① 若 6 个数中有一个是 2, 其他从集合 $\{1, 3, 5\}$ 中选择。哪个骰子是 2? 有 6 种方法, 其他骰子都有 3 种方法, 所以一共有 $6 \cdot 3^5$ 种方法
- ② 若 6 个数中有一个是 6, 其他从集合 $\{1, 3, 5\}$ 中选择。一共有 $6 \cdot 3^5$ 种方法
- ③ 若 6 个数中没有偶数, 则 6 个数全部从集合 $\{1, 3, 5\}$ 中选择, 一共有 3^6 种方法

而总的方法数是 6^6 种方法, 所以乘积不能被4整除的概率是

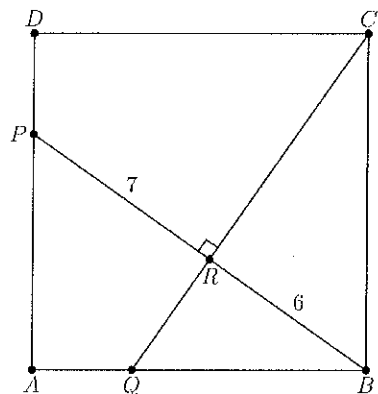
$$P_1 = \frac{6 \cdot 3^5 + 6 \cdot 3^5 + 3^6}{6^6} = \frac{15 \cdot 3^5}{6^6} = \frac{5}{64}, \text{ 因此能被4整除的概率是 } P = 1 - P_1 = 1 - \frac{5}{64} = \frac{59}{64}.$$

选择 C.

第 15 题

考点: 平面几何(全等三角形, 勾股定理)

解答:



$\triangle PAB \cong \triangle QBC$, 因此 $CQ = PB = 13$. 设正方形边长为 x , 因为 $CQ \cdot BR = QB \cdot CB$,

即 $13 \cdot 6 = QB \cdot x$, 所以 $QB = \frac{78}{x}$. 在直角 $\triangle QBC$ 中, 由勾股定理, 得到,

$$\left(\frac{78}{x}\right)^2 + x^2 = 169, x^4 - 169x^2 + 78^2 = 0, (x^2 - 117)(x^2 - 52) = 0, x^2 = 117 \text{ 或 } x^2 = 52.$$

而 $QB = \frac{78}{x} < x$, 即 $x^2 > 78$, 所以 $x^2 = 117$, 正方形的面积为 117. 选择 D.

第 16 题

考点: 概率(期望)

解答: Chris 和 Silva 各自所选的 2 个球, 可能都一样, 可能有 1 个一样, 也可能都不相同. 因此这里分 3 种情况讨论.

①若他俩都选择同样的 2 个球，那么经过 2 次调换后，还在原位不动的球有 5 个。这种情况的概率计算如下：Chris 从中随便选 2 个球，概率为 1，Silva 从 5 个球中选择相邻的 2 个球，本来有 5 种方法，则 Silva 选到的 2 个相邻的球恰好是 Chris 选到的 2 个球的概率是 $\frac{1}{5}$ 。因此这种情况的概率为： $P_1 = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ 。

②若他俩各自所选的 2 个球其中有一个是共同的球。则经过 2 次调换后，还有 2 个球原位不动。这种情况的概率计算如下：Chris 从中随便选 2 个球，概率为 1，Silva 从 5 个球中选择相邻的 2 个球，本来有 5 种方法，但目前要求 Silva 选到的 2 个相邻的球恰好有 1 个是 Chris 选到的，有 2 种方法，因此概率为 $\frac{2}{5}$ 。所以这种情况的概率为： $P_1 = 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ 。

③若他俩各自所选的 2 个球都不同。则经过 2 次调换后，还有 1 个球原位不动。这种情况的概率计算如下：Chris 从中随便选 2 个球，概率为 1，Silva 从 5 个球中选择相邻的 2 个球，本来有 5 种方法，但目前要求 Silva 选到的 2 个相邻的球都不是 Chris 选到的，有 2 种方法，因此概率为 $\frac{2}{5}$ 。所以这种情况的概率为：

$$P_1 = 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

根据期望值的计算公式，在原位不动的球的个数的期望值为 $5 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = 2.2$ ，

选择 D

第 17 题

考点：解析几何（中点公式，直线位置关系）

解答：我们知道直线 ℓ 的方程是 $y = 5x$ 。这意味着点 P' 是点 $P(-1, 4)$ 关于直线

$y = 5x$ 的对称点，因此过点 P 和点 P' 的直线垂直于 ℓ ，因此斜率为 $-\frac{1}{5}$ 。设此垂

线的方程为 $y = -\frac{1}{5}x + c$, 代入 $P(-1, 4)$, 得到 $c = \frac{19}{5}$ 。因为点 P' 和 P 的中

点是直线 $y = 5x$ 和垂线 $y = -\frac{1}{5}x + \frac{19}{5}$ 的交点, 解方程组得到交点坐标为 $(\frac{19}{26},$

$\frac{95}{26})$, 设 $P'(x', y')$, 由中点公式, $\frac{x' - 1}{2} = \frac{19}{26} \implies x' = \frac{32}{13}$, 类似的也可以得

到 y' 的值。因此 $P' = (\frac{32}{13}, \frac{43}{13})$ 。

现在我们需要将点 P' 关于 m 对称得到点 $(4, 1)$, 点 P' 和 P'' 的中点在直线 m 上,

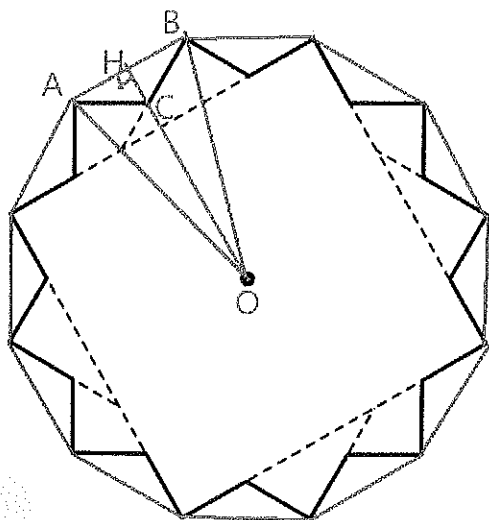
根据中点公式, 这个中点是 $(\frac{42}{13}, \frac{28}{13})$ 。因为直线 $y = mx$ 过此点, 所

以 $m = \frac{\frac{28}{13}}{\frac{42}{13}} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}$ 。直线 m 的方程为 $y = \frac{2}{3}x \implies 2x - 3y = 0 = \boxed{D}$

第 18 题

考点: 平面几何: 特殊直角三角形

解答: 如下图, 要求的图形面积可以看成是一个正 12 边形的面积减去 12 个全等的等腰三角形面积。



因为 $\angle AOB = 30^\circ$, 且 $AO=BO$ 均等于正方形对角线的一半, 为 $3\sqrt{2}$. 所以

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \text{ 则正 12 边形的面积为: } \frac{9}{2} \cdot 12 = 54.$$

在 $\triangle AOB$ 中, 由余弦定理,

$$AB = \sqrt{18+18-2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cos 30^\circ} = \sqrt{36-18\sqrt{3}} = 3(\sqrt{3}-1), \quad AH = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1).$$

为在直角三角形 ACH 中, $\angle HAC = \angle HAO - \angle CAO = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$, 所以

$$CH = \frac{HA}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 那么}$$

$$S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 3(\sqrt{3}-1) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \frac{6\sqrt{3}-9}{2}$$

因此, 24 边形的面积 $S = 54 - 12 \cdot S_{\triangle CAB} = 54 - 12 \cdot \frac{6\sqrt{3}-9}{2} = 108 - 36\sqrt{3}$, 所以

$$a+b+c = 108 + 36 + 3 = 147. \text{ 选择 E.}$$

第 19 题

考点: 代数(幂的运算)

解答: 因为 $\sqrt{777\dots 777} = \sqrt{7.77\dots 7 \times 10^{312}} = \sqrt{7.77\dots 7} \times 10^{156}$, 因为

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{7.77\dots 7} < \sqrt{9} = 3, \text{ 因此 } \sqrt{7.77\dots 7} \text{ 的首位是 2, 那么 } f(2)=2.$$

因为 $\sqrt[3]{777\dots 777} = \sqrt[3]{7.77\dots 7 \times 10^{312}} = \sqrt[3]{7.77\dots 7} \times 10^{104}$, 因为

$$1 = \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{7.777\dots 7} < \sqrt[3]{8} = 2, \text{ 因此 } \sqrt[3]{7.77\dots 7} \text{ 的首位是 1, 那么 } f(3)=1.$$

因为 $\sqrt[4]{777\dots 777} = \sqrt[4]{7.77\dots 7 \times 10^{312}} = \sqrt[4]{7.77\dots 7} \times 10^{78}$, 因为

$$1 = \sqrt[4]{1} < \sqrt[4]{7.777\dots 7} < \sqrt[4]{16} = 2, \text{ 因此 } \sqrt[4]{7.77\dots 7} \text{ 的首位是 1, 那么 } f(4)=1.$$

因为 $\sqrt[5]{777\dots 777} = \sqrt[5]{777.77\dots 7 \times 10^{310}} = \sqrt[5]{777.77\dots 7} \times 10^{62}$, 因为

$$3 = \sqrt[5]{243} < \sqrt[5]{777.777\dots 7} < \sqrt[5]{1024} = 4, \text{ 因此 } \sqrt[5]{777.77\dots 7} \text{ 的首位是 3, 那么 } f(5)=3.$$

因为 $\sqrt[6]{777\dots777} = \sqrt[6]{7.77\dots7 \times 10^{312}} = \sqrt[6]{7.77\dots77} \times 10^{52}$, 因为

$1 = \sqrt[6]{1} < \sqrt[6]{7.777\dots7} < \sqrt[6]{64} = 2$, 因此 $\sqrt[6]{7.77\dots7}$ 的首位是 1, 那么 $f(6)=1$.

所以, $f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=2+1+1+3+1=8$, 选 A.

第 20 题

考点: 条件概率

解答: 用 $P(5 | \text{win})$ 表示 Hugo 在已经赢得游戏的情况下, 他第一次掷出 5 的概率;

用 $P(\text{win})$ 表示 Hugo 赢得游戏的概率; 用 $P(5 \& \text{win})$ 表示 Hugo 第一次掷出 5, 且

最后赢得游戏的概率。则 $P(5 | \text{win}) = \frac{P(5 \& \text{win})}{P(\text{win})}$, 下面分别算分子和分母。

因为 4 个人最终赢得游戏的概率是等同的, 因此 Hugo 赢得游戏的概率为

$$P(\text{win}) = \frac{1}{4}.$$

Hugo 第一次掷出 5 之后, 根据第一局跟他平局的人数, 我们需要分类讨论:

① 第一局有 0 人与他平局。因此其他 3 人掷出的数都是 1~4 之间, 概率均为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

而 Hugo 扔到 5 概率为 $\frac{1}{6}$ 。此时 Hugo 已经赢得游戏, 因此这种情况 Hugo 胜出的

的概率为 $P_1 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{6 \cdot 3^3}$.

② 第一局有 1 人与他平局。Hugo 扔到 5 的概率为 $\frac{1}{6}$, 3 人中选 1 人和他平局,

有 $C_3^1 = 3$ 种方法, 选出的这个人掷出 5 的概率为 $\frac{1}{6}$, 剩余 2 人均掷出 1~4 的数字,

概率均为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, 接着 Hugo 与和他平局的人进入第二轮, 最终 Hugo 赢得比赛的

概率为 $\frac{1}{2}$ 。因此这种情况 Hugo 胜出的概率为 $P_2 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6^2 \cdot 3}$.

③ 第一局有 2 人与他平局。Hugo 扔到 5 的概率为 $\frac{1}{6}$ ，3 人中选 2 人和他平局，有 $C_3^2 = 3$ 种方法，选出的这 2 个人掷出 5 的概率均为 $\frac{1}{6}$ ，剩余 1 人均掷出 1~4 的数字，概率均为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，接着 Hugo 与和他平局的 2 人进入第二轮，最终 Hugo 赢得比赛的概率为 $\frac{1}{3}$ 。因此这种情况 Hugo 胜出的概率为

$$P_3 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{6^3 \cdot 3}.$$

④ 第一局有 3 人与他平局。Hugo 扔到 5 的概率为 $\frac{1}{6}$ ，与他平局的另外 3 个人掷出 5 的概率均为 $\frac{1}{6}$ ，接着这 4 人又进入第二轮，最终 Hugo 赢得比赛的概率为 $\frac{1}{4}$ 。

因此这种情况 Hugo 胜出的概率为 $P_4 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6^4 \cdot 4}.$

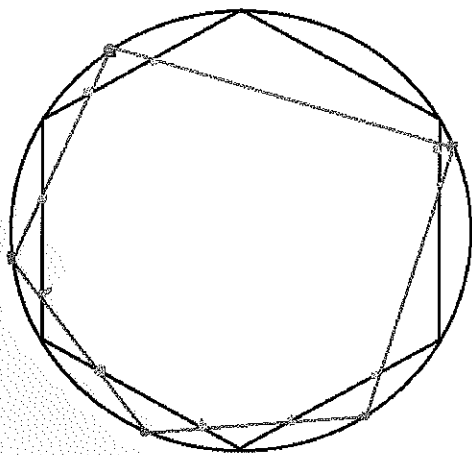
$$\text{因此, } P(5 | \text{win}) = \frac{P(5 \& \text{win})}{P(\text{win})} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{\frac{1}{4}} = \frac{32}{6 \cdot 3^3} + \frac{8}{6^2 \cdot 3} + \frac{8}{6^3 \cdot 3} + \frac{1}{6^4}$$

$$\frac{256 + 96 + 16 + 1}{6^4} = \frac{369}{6^4} = \frac{41}{144}. \text{ 选择 C.}$$

第 21 题

考点：排列组合（分类讨论）+分离的思想

解答：我们分别讨论 5, 6, 7 和 8 边形两两之间有多少个交点。



① 5 边形和 6 边形的交点数。如上图, 6 边形将圆分成 6 段相等的圆弧, 而 5 边形的 5 个顶点分别位于这 6 段圆弧中的 5 段圆弧上(5 边形不可能有 2 个顶点位于同一段圆弧上, 不然导致五边形的这条边所对的圆心角小于六边形一条边所对的圆心角, 矛盾)。我们从上图可以看到, 从 5 边形的一个顶点出来的两条边和六边形的边交于 2 个点, 即 5 边形的每个顶点都对应 2 个交点, 那么 5 边形总共有 $2 \cdot 5 = 10$ 个交点。

② 5 边形和 7 边形的交点数。类似上述分析, 7 边形将圆分成 7 段相等的圆弧, 5 边形的 5 个顶点位于其中 5 段圆弧上, 每个顶点对应 2 个交点, 所以总共 $2 \cdot 5 = 10$ 个交点。

③ 5 边形和 8 边形也有 $2 \cdot 5 = 10$ 个交点。

④ 6 边形和 7 边形的交点数。7 边形将圆分成 7 段相等的圆弧, 6 边形的 6 个顶点位于其中 6 段圆弧上, 每个顶点对应 2 个交点, 所以总共 $2 \cdot 6 = 12$ 个交点。

⑤ 6 边形和 8 边形的交点数。8 边形将圆分成 8 段相等的圆弧, 6 边形的 6 个顶点位于其中 6 段圆弧上, 每个顶点对应 2 个交点, 所以总共 $2 \cdot 6 = 12$ 个交点。

⑥ 7 边形和 8 边形的交点数。8 边形将圆分成 8 段相等的圆弧, 7 边形的 7 个顶点位于其中 7 段圆弧上, 每个顶点对应 2 个交点, 所以总共 $2 \cdot 7 = 14$ 个交点。

所以总共有 $10 + 10 + 10 + 12 + 12 + 14 = 68$ 个交点. 选 E.

第 22 题

考点: 数论 (模运算)

解答:

$$S_n = \frac{(1+2+\dots+n)^2 - (1^2+2^2+\dots+n^2)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$$

因为 S_n 是个整数, 因此 $(n-1)n(n+1)(3n+2)$ 一定能被 $24 = 2^3 \cdot 3$ 整除, 而要使得 S_n

能被 3 整除, 只需 $(n-1)n(n+1)(3n+2)$ 能被 9 整除即可, 即

$(n-1)n(n+1)(3n+2) \equiv 0 \pmod{9}$. 接下来依次将 $n \equiv 0, 1, 2, 3, \dots, 8 \pmod{9}$ 代入前式检验

即可。当 $n \equiv 0, 1 \pmod{9}$ 时, 因为分别可以使得 n 和 $n-1$ 为 9 的倍数, 因此符合。

但当 $n \equiv 2 \pmod{9}$ 时, $(n-1)n(n+1)(3n+2) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 \not\equiv 0 \pmod{9}$, 所以 $n \equiv 2 \pmod{9}$

不适合。类似可以得到, $n \equiv 3, 4, 5, 6, 7 \pmod{9}$ 均不适合。但是当 $n \equiv 8 \pmod{9}$ 时,

此时 $n+1$ 为 9 的倍数, 因此符合。

综上, 当 $n \equiv 0, 1, 8 \pmod{9}$, 即 $n = 9k, 9k+1, 9k+8$ 时, 均符合。当 k 取 $0, 1, 2, 3$ 时,

符合要求的 n 为 $n = 0, 1, 8, 9, 10, 17, 18, 19, 26, 27, 28, 35$, 而 $n \geq 2$, 因此最小的 10 个 n

是 $n = 8, 9, 10, 17, 18, 19, 26, 27, 28, 35$, 之和为

$n = 8 + 9 + 10 + 17 + 18 + 19 + 26 + 27 + 28 + 35 = 197$, 选 B

第 23 题

考点: 排列组合和概率 (选定标准进行分类讨论)

解答: 这里一共 10 条边, 每条边都有 2 种涂色方法, 所以共有 2^{10} 种方法。我们

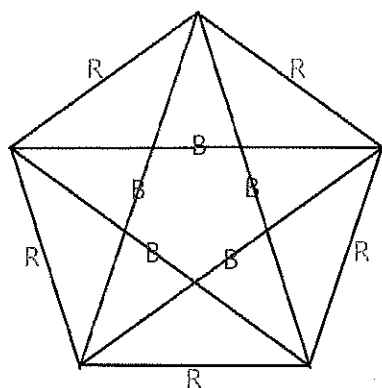
再看答案选项, 都接近 1, 说明存在三边同色的情况数很多, 而反面情况: 不存

在三边颜色相同的三角形的情況比较少, 因此这道题我们采用反面考虑。对于这

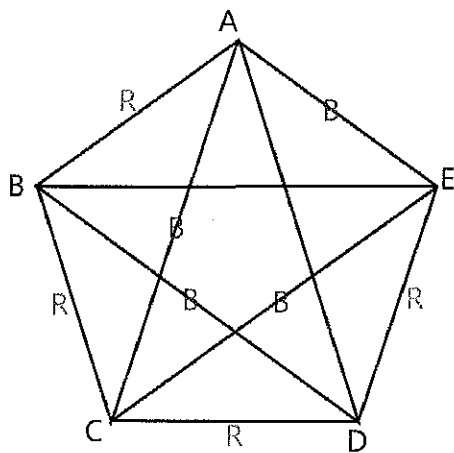
种涂色问题, 需要采取一个分类讨论的标准。下面根据正五边形的 5 条边中红色

边的数目进行分类讨论。

①若5条边全是红色。如下图所示，那么5条对角线都只能全部涂成蓝色，才能保证所有三角形三边颜色都不同。因此只有1种方法。



②若4条边是红色。一共有5种涂色方法。如下图所示为其中一种。为保证 $\triangle ABC$ 三边颜色不同，对角线AC只能蓝色。同理，为保证 $\triangle BCD$ 和 $\triangle CDE$ 三边颜色都不同，对角线BD和CE也都只能是蓝色。但此时 $\triangle ACE$ 三边都是蓝色，产生矛盾。因此这种情况有0种。

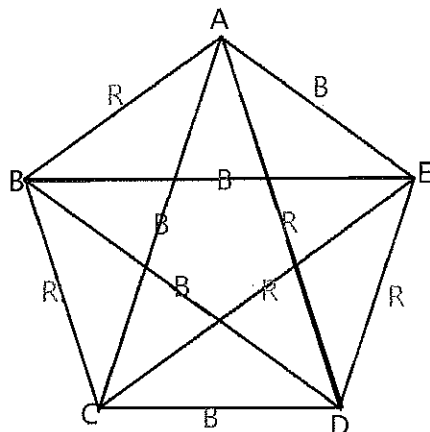
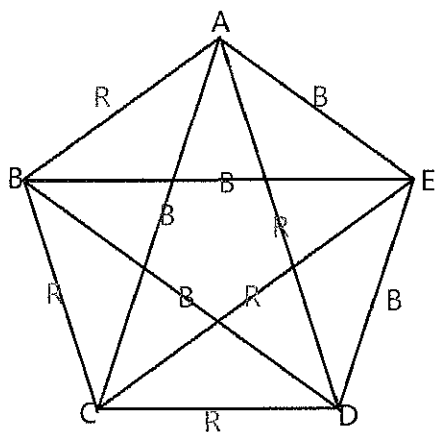


③若3条边是红色。这里需要讨论3条边都相邻，还是只有其中2条边相邻。

1. 若3条红边都相邻，如下左图所示。在 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ADE$ 中，为保证三边颜色不同，对角线AC、BD和AD分别只能是蓝色，蓝色和红色。此时 $\triangle ACE$

中, CE 只能红色。接着, $\triangle BCE$ 中, BE 只能为蓝色。但此时 $\triangle BDE$ 三边全蓝, 矛盾。

2. 若只有 2 条红边相邻。取决于哪 3 条边为红色, 这 5 条边共有 5 种涂色方法。如下右图是其中一种涂色方法。在 $\triangle ABC$ 中, 为保证三边颜色不同, 对角线 AC 只能是蓝色。此时 $\triangle ACD$ 中, AD 只能红色。接着, $\triangle ABD$ 中, BD 只能为蓝色。 $\triangle ACE$ 中, CE 只能为红色。 $\triangle BCE$ 中, BE 只能为蓝色。因此 5 条对角线只有 1 种涂色方法。所以这种情况下总共有 $5 \times 1 = 5$ 种涂色方法。



④若 2 条边是红色, 那么就有 3 条边是蓝色, 这和有 3 条边是红色情况数一样, 总共 5 种方法。

⑤若 1 条边是红色, 那么就有 4 条边是蓝色, 这和有 4 条边是红色情况数一样, 总共有 0 种。

⑥若全部边都是蓝色, 这 and 全部边都是红色情况数一样, 总共有 1 种。

综上, 不存在三边同色的三角形的涂色方法数是 $1+5+5+1=12$ 种。那么存在三边

同色的三角形概率为 $P = 1 - \frac{12}{2^{10}} = 1 - \frac{3}{256} = \frac{253}{256}$, 选择 D.

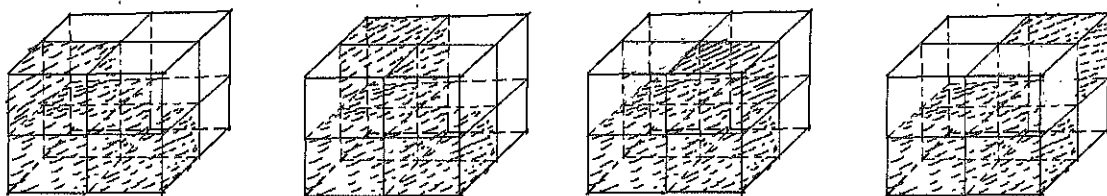
第 24 题

考点:排列组合(分类讨论)+空间想象

解答: 我们根据 4 个蓝色单位正方体在上下两层中如何分布进行分类讨论:

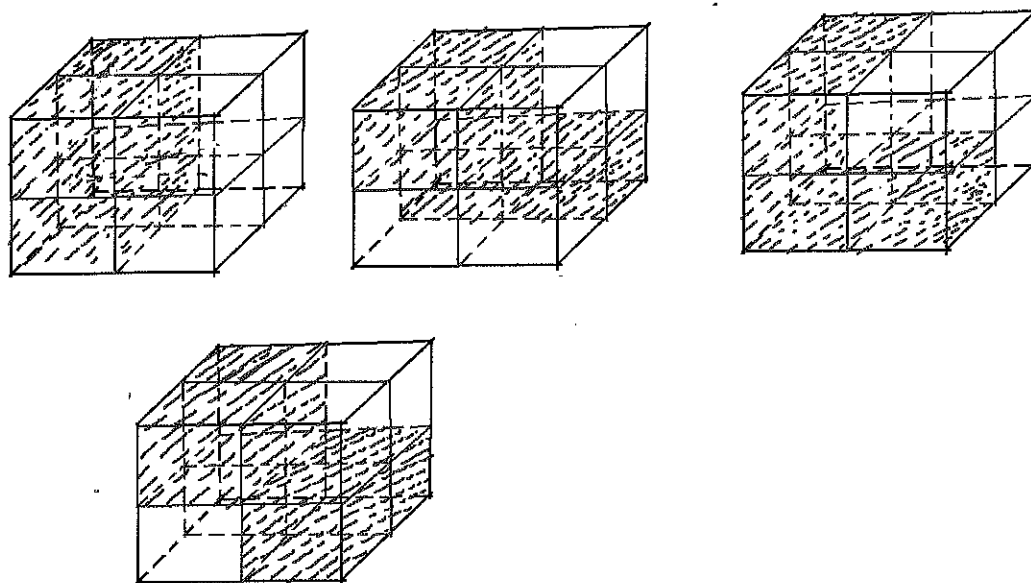
①. 若 4 个蓝色正方体都分布在同一层, 另一层全部是白色正方体, 则只有 1 种方法.

②. 若上下两层中有一层是 3 个蓝色正方体, 另一个层是 1 个蓝色正方体. 则共有 4 种方法, 如下图:

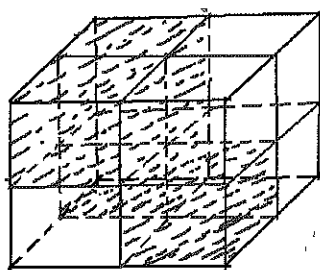


③ 若上下两层中各有 2 个蓝色正方体, 则需要进一步根据各层中这 2 个正方体是相邻还是对角线位置进行分类讨论。

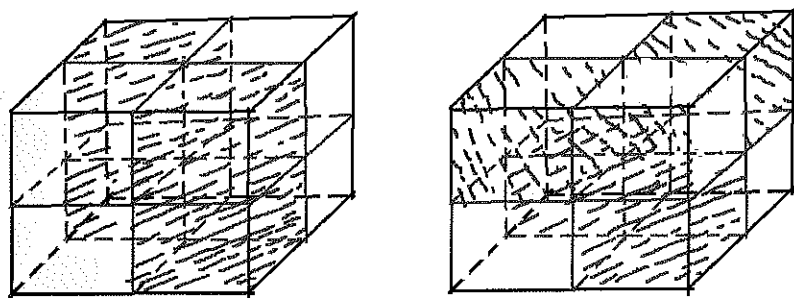
1. 若上下两层的 2 个蓝色正方体均相邻, 先固定上层相邻 2 个蓝色正方体的位置, 则下层 2 个蓝色正方体一共有 4 种位置, 如下图. 对于第一行的前 3 种情况, 因为使得左层有 4 个或者 3 个蓝色正方体, 是和①②重复的情况。最后一种情况 (这种情况标记为*, 后面会用到), 不论上下层, 左右层还是前后层都是 2 个正方体, 是 1 种有效情况。



2. 若上下两层中，其中一层的2个正方体相邻，另一层的2个正方体处于对角线位置，则如下图所示，这样使得左层有3个蓝色正方体，这在前述情况②已经讨论过，重复。



③若上下两层中，每一层的2个正方体均处于对角线位置，有如下图所示的2种情况。其中左图的这种情况和(*)情况一样，是(*)情况通过将其前面的面翻转 90° 至上面得到，因此重复不考虑。



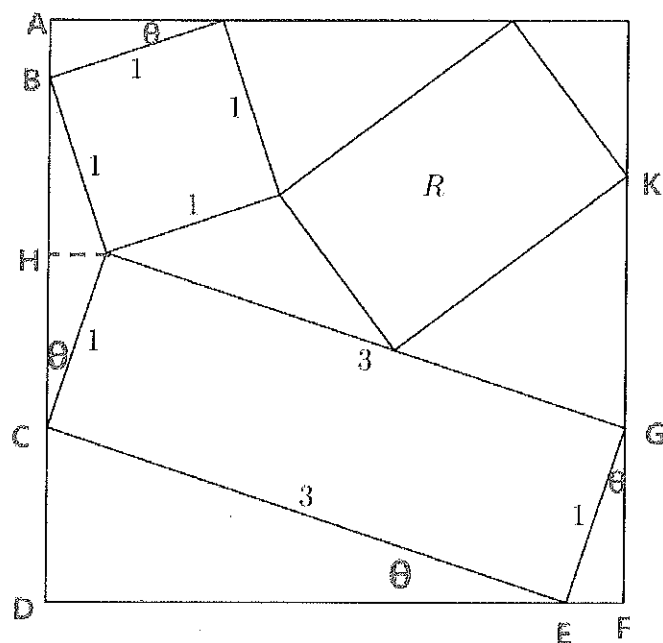
而右边这种情况不论左右层，上下层，还是前后层，各层均 2 个蓝色正方体，而且不与前述重复，是 1 种有效情况。

综上，总共有 $1+4+2=7$ 种情况。选择 A。

第 25 题

考点：平面几何

解答：



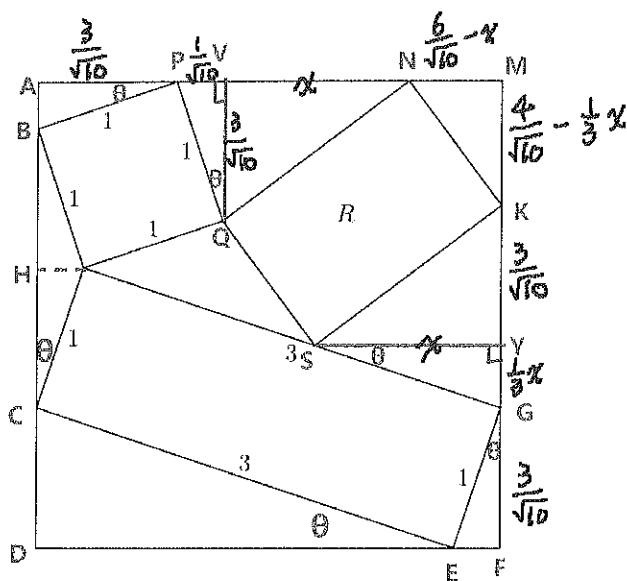
因为边长为 1 的小正方形和边长为 1、3 的长方形内接在一个大的正方形中，小正方形和长方形的相互位置关系一定是固定的，才能保证内接进去，且此时大正方形边长也可求。因此图中角度 θ 是可求的。下面建立关于 θ 的方程。

因为 $AB + BC + CD = DE + EF$ ，即 $1 \cdot \sin \theta + 2 \cos \theta + 3 \sin \theta = 3 \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$ ，因此

$3 \sin \theta = \cos \theta$ ， $\tan \theta = \frac{1}{3}$ ，因此得， $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ， $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 。那么大的正方形

边长为 $DE + EF = 3 \cos \theta + \sin \theta = \frac{10}{\sqrt{10}}$ 。同时得到， $AP = QV = GF = \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ，

$PV = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 下面我们求 R 的面积。



设 $VN = x$, 则 $MN = \frac{6}{\sqrt{10}} - x$, 而因为 $\triangle QVN \cong \triangle KYS$, 所以

$SY = VN = x$, $KY = VQ = \frac{3}{\sqrt{10}}$, 而在直角三角形 SYG 中, $\tan \theta = \frac{1}{3}$, 所以 $YG = \frac{1}{3}x$,

由此, $MK = \frac{4}{\sqrt{10}} - \frac{1}{3}x$. 因为 $\triangle VQN \sim \triangle MNK$, 所以 $\frac{VQ}{VN} = \frac{MN}{MK}$, 即

$$\frac{3}{\sqrt{10}x} = \frac{\frac{6}{\sqrt{10}} - x}{\frac{4}{\sqrt{10}} - \frac{1}{3}x}, \text{ 解得, } x = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ 或 } \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

①当 $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 时, 在直角三角形 QVN 中, $QN = \frac{3}{\sqrt{5}}$, 而在直角 $\triangle MNK$ 中,

$$MN = \frac{6}{\sqrt{10}} - x = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad MK = \frac{4}{\sqrt{10}} - \frac{1}{3}x = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \text{所以 } NK = \sqrt{2} \cdot MN = \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ 所以}$$

$$R = QN \cdot NK = \frac{9}{5}.$$

②当 $x = \frac{4}{\sqrt{10}}$ 时, 在直角三角形 QVN 中, $QN = \frac{5}{\sqrt{10}}$, 而在直角 $\triangle MNK$ 中,

$$MN = \frac{6}{\sqrt{10}} - x = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad MK = \frac{4}{\sqrt{10}} - \frac{1}{3}x = \frac{8}{3\sqrt{10}}, \quad \text{所以} \quad NK = \frac{\sqrt{10}}{3}。 \text{所以}$$

$$R = QN \cdot NK = \frac{5}{3}。$$

因此 R 的 2 个可能值之和为 $\frac{9}{5} + \frac{5}{3} = \frac{52}{15}$, $52+15=67$, 选择 E.